التحليل الجزئى
لسلوك مفردات المجتمع

الدكتور
محمود سمير طوبار
أستاذ الأقتصاد بجامعة الزقازيق

٢٠٠٦

إهداء

تأكيداً لحقيقة أن « العلم نور »

أرجو أن يعبر مؤلفي هذا عن أحد مشاعل هذا النور .... حملته مع أسرتي بكل المثابرة والتضامن .... وبروح الحب والوفاء .... فإليهم جميعاً

زوجتي ،

وأولادي : منيه وأيمن ورانيا وريهام

ثمرة هذا الجهد والصبر والإيمان

المقدمة

يواجه المجال الاقتصادى ، وهو بصدد بناء قاعدة اقتصادية يوصل بها طبيعة العلاقات بين الظواهر الاقتصادية ، مشكلة التجميع(*) . ويجد بناءاً على ذلك أن ما ينطبق على المجتمع قد لا ينطبق على الوحدة الاقتصادية . . فالتحويلات التى تتم بين الأفراد تؤثر فى مراكزهم المالية وحجم مايحوزونه من أصول ولكنها لاتترك أى أثر على أصول المجتمع أو مركزه المالى . لذلك كان من الضرورى أن تفصل النظرية الاقتصادية بين تحليل العلاقات الخاصة بالمجتمع وتلك التى تفسر سلوك المفردات والوحدات الاقتصادية . ويطلق على ذلك الجانب الخاص بدراسة إجماليات المجتمع « التحليل الكلى » .. وتعرف دراسة وحدات المجتمع بـ « التحليل الجزئى » . لذلك فإن موضوع هـذا الكتاب يتعمق فى دراسة مكونات الوحدات الاقتصادية وسلوكها .

وعامة ، توجد ثلاثة مجموعات اقتصادية بالمجتمع :

مجموعة المستهلكين Consumers ، ومجموعة المنظمين Entrepreneurs ومجموعة أصحاب الموارد Resource Owners ، ويعرض أصحاب الموارد الاقتصادية المدخلات لإنتاج مجموعة السلع التى تحددها قوى السوق . ويحصل أصحاب الموارد لقاء استخدام مواردهم على دخل نقدى . ويعينهم هـذا الدخل النقدى على أداء دورهم كمستهلكين .

(*) يعبر عن هذه المشكلة بالإنجليزية Fallacy of Compraition

ويقوم المنظمون بتنظيم الإنتاج ، ويحددون المعروض من السلع والخدمات في السوق ويكافىء المنظم الذي يجيد تنظيم إنتاجه بكفاءة ، وينجح في تقدير رغبات المستهلكين بالحصول على دخل نقدي في شكل ربح ثم يمكنهم هذا الدخل من دخول السوق كمستهلكين.

ويكتسب بعض الأفراد دخولهم النقدية نتيجة بيع الموارد الاقتصادية أو استخدام هذه الموارد . بينما يكتسب البعض الآخر الدخل عن طريق استخدام مواردهم الخاصة (مهارة تنظيمية) في تنظيم الإنتاج . وينتمي جميع الأفراد المكتسبين لدخول نقدية إلى المجموعة الاقتصادية المسماة « بالمستهلكين » وطبيعي أن هناك أعضاء آخرين ينتمون لهذه المجموعة . فأعضاء الأسرة الذين يعتمدون على ما يكتسبه رب الأسرة من دخل يشتركون في توزيع ميزانية الأسرة ، وهم يعتبرون بذلك مستهلكين . ويحصل الأفراد ، الغير قادرين على تكسب دخل نقدي ، على النقود من خلال التحليلات وهم ينضمون إلى مجموعة المستهلكين.

ولن يهمنا ، في هذا المجال ، أن نتعرض إلى مصدر الدخل النقدي . بقدر ما يهمنا أن نبين أن النقود تحصل عليها الأسر وتنفق في شراء السلع الاستهلاكية وتحدد كل أسرة كيفية توزيع دخلها النقدي بين العديد من السلع الاستهلاكية المتاحة لها . وبعبارة أخرى ، تقرر كل أسرة طلبها من كل بند من البنود (ومع ذلك قد تكون الكمية المطلوبة لكثير من البنود مساوية للصفر عند أي سعر من الأسعار وتكون مجموعة القرارات الخاصة بالطلب « طلب السوق » Markes demand الذي يعبر عن رغبات المجتمع في كيفية توزيع الموارد .

ويهدف الجزء الأول من هذا الكتاب إلى تحليل سلوك المستهلك أو بعبارة أخرى تكوين طلب المستهلك في السوق .. بينما يختص الجزء الثاني بتحليل سلوك المنتج . أو بعبارة أخرى تحليل العملية الإنتاجية وما يرتبط بها من تكاليف . وحيث أن المستهلك والمنتج يكونان طرفي المبادلة في السوق سنقوم

بتجميع سلوكهما فى الجزء الثالث حيث ندرس سلوك الطبقات المختلفة من المنتجين وكيفية تكوين أسعار السوق تحت الظروف المختلفة من هياكل السوق . ومن ثم يمكن أن تطلق على دراسة الجزء الأول سلوك أو توازن المستهلك والثانى سلوك أو توازن المنتج والثالث توازن السوق .. ونضيف فى الجزء الرابع تحليل لسوق للموارد الاقتصادية وكيفية تحديد أسعار الموارد لقاء ماتقدمه من خدمات فى العملية الإنتاجية .. وأخيراً يعرض الجزء الخامس تحليل الرفاهية الاقتصادية للمجتمع .. فعلى ضوء البيانات التى تعرض : رغبات المستهلكين كتعبير عن طلب السوق ، وتبين تجميع الموارد المتاحة للمجتمع ،وحالة تكنولوجيا الإنتاج نود أن نحدد الظروف التى يتعين تحقيقها — نوع التنظيم الاقتصادى الذى يفضله المجتمع ، حتى يترتب على تخصيص الموارد الاقتصادية تعظيم مستوى المعيشة لأفراد المجتمع « تعظيم الرفاهية الاقتصادية » .

والأسلوب الذى نعرض به هذه الموضوعات يجمع بين العرض النظرى اللفظى والبيانى وبين استخدام الأسلوب الرياضى فى التحليل وكلها تخلص فى النهاية إلى نتيجة واحدة تصور مجريات الأمور فى سلوك مفردات المجتمع وضوابطه وتحدد الشروط المقيدة لهذا السلوك والطريق الأمثل للجمع بين تحقيق الرغبات والقيود المحددة لمنتهاها .

أملى أن يكون هذا الكتاب عونا للطالب فى توضيح مفهوم النظرية الاقتصادية الجزئية . ونصيحتى له أن يكون رائدة عند القراءة الفهم الواضح لجزئيات الموضوع أكثر منه الاستذكار والحفظ .

دكتور سمير طوبار

الجزء الأول

الطلب

وسلوك المستهلك

الفصل الأول

المنفعة وطلب المستهلك

كل فرد أو كل أسرة يكون لديها فكرة واضحة عن الدخل النقدى الذى تحصل عليه فى فترة زمنية مستقبلة ، ولتكن سنة مثلا . كذلك يكون لديهم فكرة (قد تكون أقل وضوحا وتحديداً) ، عن السلع والخدمات التى يرغبون شرائها. وتحاول كل أسرة إنفاق دخلها المحدود بالطريقة التى تعظم من رفاهية هذه الأسرة وصالحها الاقتصادى . ولايعنى ذلك بالضرورة ، أن كل فرد أو كل أسرة ستحقق نجاحا فى مهمتها هذه . بل قد يرجع فشل الفرد أو الأسرة فى توزيع إنفاقه بالطريقة التى تصل برفاهيته إلى أقصى حد ممكن ، إلى عدم توافر معلومات دقيقة لدى الفرد أو الأسرة . وقد يكمن السبب وراء دوافع الشراء . وعلى أى الأحوال ، فإن جهود الفرد أو الأسرة فى السعى نحو تحقيق أقصى إشباع ممكن من الدخل النقدى المحدود ، هى التى تحدد طلب الفرد على السلع والخدمات .

وحتى يمكن تحليل طلب المستهلك بشكل أكثر دقة يتعين علينا : أولا .. البحث عن تفسير لقانون الطلب أكثر تطوراً فى التحليل . وثانياً .. دراسة الكيفية التى يوزع بها المستهلك دخله النقدى بين السلع والخدمات المتعددة .

بعض الإيضاحات حول قانون الطلب

المعروف أن هناك علاقة عكسية بين ما يرغب ويقدر المستهلك على شرائه من السلع والخدمات ، وبين أسعار هذه السلع والخدمات. هذه العلاقة العكسية بين الكميات المطلوبة والأسعار هى التى تعرف « بقانون الطلب » فالسعر المرتفع لايشجع المستهلك على

الشراء ، بينما يغرى السعر المنخفض ، المستهلك ، على شراء المزيد . هذه العلاقة العكسية تظهر بيانيا فى شكل منحنى للطلب مائل إلى أسفل — ميله سالب . وتصور هذه العلاقة أن المستهلك يفضل السعر المنخفض على السعر المرتفع . وحتى يمكن له شراء المزيد من السلعة يتعين إنخفاض السعر الذى يشترى به .

أثر الدخل وأثر الاحلال Incme and Substitution Effects

تستند أحد التفسيرات حول طبيعة العلاقة العكسية لقانون الطلب إلى أنه كلما انخفض سعر المنتج كلما أصبح المستهلكين قادرين وراغبين على شراء المزيد من هذا المنتج .

فعندما ينخفض سعر الدجاج ، مثلا ، يصبح المستهلك قادراً على شراء المزيد من الدجاج من دخله النقدى . فإذا بلغ دخله النقدى ١٠ جنيهات فى الأسبوع ، فإنه يستطيع شراء ١٠ دجاجات بسعر جنيه واحد للدجاجة . ولكن عندما ينخفض سعر الدجاجة إلى ٥٠ قرش للواحدة ، وبافتراض أن هـــذا المستهلك سيحافظ على الكمية التى يشتريها من الدجاج (١٠ دجاجات) فإنه يستطيع بذلك توفير مبلغ ٥ جنيهات فى الأسبوع يستطيع توجيهها إلى شراء المزيد من الدجاج أو ينفقها فى شراء سلع أخرى . فانخفاض سعر السلعة يزيد من الدخل الحقيقى للمستهلك . ويعرف ذلك بـ « أثر الدخل » .

ولكن زيادة قدرة المستهلك على الشراء تمثل جانباً من الحقيقة فقط ، إذ يتحتم أن تتوفر لدى المستهلك رغبة بجانب القدرة حتى يقدم على الشراء . ومن ثم فإن كون المستهلك أصبح قادراً على شراء المزيد من الدجاج عند السعر المنخفض لايعطى تفسيراً كاملا للسبب وراء شراء كمية أكبر من الدجاج . فانخفاض سعر الدجاج (مع بقاء أسعار السلع الأخرى على حالها) يجعل الدجاج

أكثر إغراء للمشترى . ويعتبر شراءه بهذا السعر المنخفض (٥٠ قرشا) فرصة أفضل من الظروف التى يرتفع فيها السعر (إلى جنيه) ويتحمل فيها نفقات أعلى. فالسعر المنخفض سيجذب المستهلك إلى احلال الدجاج محل بعض السلع الأقل إغراء فى ميزانيته . فالدجاج قد يحل محل السردين أو الفول والطعمية أو غير ذلك من الأطعمة الأخرى . فالسعر المنخفض يزيد من الاغراء النسبى للسلعة ويجعـــل المستهلك راغباً فى شراء المزيد منه . . ويعرف ذلك بـ « أثر الاحلال » .

ومحصله آثار الدخل والاحلال تجعل المستهلك قادراً وراغباً فى شراء كمية أكبر من سلعة معينة عند السعر المنخفض عن الكمية التى يشتريها منها عند السعر المرتفع .

قانون تناقص المنفعة الحدية :

وهناك تفسير آخر لقانون الطلب يستند على القاعدة المعروفة فى أن رغبات المستهلك غير محدودة لا يمكن اشباعها فى حدود الموارد النادرة . . ومع ذلك فإن حاجات المستهلك من سلع معينة يمكن اشباعها بالكامل . ويستطيع المستهلك الحصول على مايرغب من السلع والخدمات ، خلال فترة معينة من الزمن (بافتراض أن أذواق المستهلك لاتتغير) ولكن عندما يحصل المستهلك على المزيد — من سلعة معينة ، يصبح أقل تلهفا للحصول على وحدات إضافية من نفس السلعة . والسلع المعمرة مثال واضح على ذلك . فرغبة المستهلك ، الذى لايملك سيارة ، فى الحصول على واحدة تكون قوية جداً . ولكن رغبته فى الحصول على سيارة ثانية تكون أقل قوة ، كذلك فإن رغبته فى الحصول على سيارة ثالثة أو رابعة تكون ضعيفة جداً . فمها ارتفع دخل الأسرة وزادت ثروتها يكون من النادر أن تمتلك أسرة واحدة ما يزيد على ستة سيارات ، على الرغم من الحقيقة أن دخول مثل هذه الاسر يمكن أن تسمح لهم بشراء أسطول من السيارات وتحمل مصاريف تشغيلها .

ولقد بلور الاقتصاد بين فكرة ، الاشباع الذى يمكن أن يحصل عليه المستهلك من إستهلاكه لوحدات متعاقبة من سلعة ما فى قانون تناقص المنفعة الحدية The Law of diminishing marginal utility ولكن ماهو المقصود بهذا القانون ؟ أن تحليل هذا القانون يبين أن السلعة تكون لها منفعة إذا كانت لها قدرة على اشباع الحاجة (أو الرغبة) فالمنفعه هى قوة اشباع الحاجة . ويتعين علينا أن نؤكد هنا ، على خاصيتين لهذه الفكرة . الأولى أن « المنفعة » Utility « والنفع » Usefulness ليسوا مراداً فان بأى حال من الأحوال فالخاتم الماس واللوحة الزيتية من رسم بيكاسو قد لايكون لهم نفع بالمعنى العملى الوظيفى ومع ذلك فإن لهم منفعة هائلة لخبراء الفن المتمكنين من تقنين فن هذه الصورة ، وللطالبات فى المعاهد المختلطة الذين يودون الظهور أمام زملائهم بمظهر الثراء والمباهاة ببريق الخاتم الماس . والخاصية الثانية . (والمتضمنة فى الأولى) هى أن المنفعة شىء شخصى . . . فمنفعة سلعة ماتختلف اختلافاً كبيراً من شخص إلى آخر . .

وتعنى المنفعة الحدية ، ببساطة « المنفعة الإضافية » ، أو الاشباع الذى يحصل عليه المستهلك من وحدة إضافية من سلعة معينة . وفى الأجل القصير ، حين نفترض ثبات أذواق المستهلك ، تتناقص المنفعة الحدية للوحدات المتعاقبة من السلعة[1] والسبب فى ذلك أن المستهلك يصبح فى آخر الأمر متخم أو يتشبع بالكامل

---

(١) ربما نظراً زيادة على المنفعة الحدية للوحدات المتعاقبة من سلعة ما لفترة فالسيجارة الثالثة قد تعطى حجم أكبر من الاشباع الإضافى عن السيجارة الأولى أو الثانية . ولكن بعد نقطة معينة ، يتوقع أن تنخفض المنفعة الحدية للوحدات المضافة .

من هذه السلعة . وتعرف حقيقة انخفاض المنفعة الحدية كلما حصل المستهلك على وحدات إضافية من سلعة ما بقانون تناقص المنفعة الحدية .

ولما كانت المنفعة شخصية ، تكون غير قابلة للقياس الكمى . . فهى ظاهرة حسية ، شأنها شأن السعادة ، لا يمكن قياسها ، ولكنها قابلة للترتيب . . فمن المستحيل أن يقول المرء أن سعادته اليوم تساوى كذا . . ولكنه يستطيع أن يؤكد أن سعادته اليوم أكبر أو أقل من سعادته بالأمس . . كذلك لا يستطيع الفرد أن يعطى قيمة لما يستمده من اشباع نتيجة لإستهلاكه لبرتقالة . . ولكنه يستطيع أن يؤكد أن إستهلاكه للبرتقالة يعطى له اشباعا أقل أو أعلى من الإشباع الذى يحصل عليه من إستهلاكه لتفاحة . . غير أننا سنطرح هذه القضية جانباً ونفترض مؤقتا أنه يمكن قياس المنفعة ، وذلك لتبسيط عرض الموضوع على القارىء . . فلو فرضنا أنه يمكن قياس المنفعة بوحدات تسمى «وحدات المنفعة» Utils . هذه الوحدات التخيلية المصطنعة للاشباع هى فى الحقيقة حيلة يتبعها المنظم للوصول إلى وسيلة ملائمة لقياس أفكارنا حول سلوك المستهلك . ويبين الجدول (١ — ١) العلاقة بين الكمية التى يحصل عليها مستهلك ما من سلعة أ — والمنفعة الإضافية التى يستمدها من كل وحدة متعاقبة من هذه السلعة . ونفترض فى هذا المثال أن المنفعة الحدية تبدأ فى التناقص بعد الحصول على الوحدة الأولى من أ . ونعطى كل وحدة تالية منفعة حدية أقل من الوحدة التى تسبقها ذلك لأن حاجة المستهلك للسلعة أ تتناقص تدريجيا إلى أن تتلاشى عندما يصل المستهلك إلى حد الاشباع الكامل .

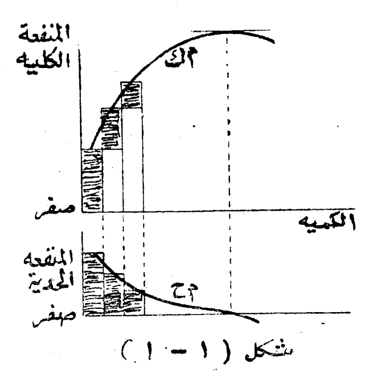
جـــدول (١ — ١)

قانون تناقص المنفعة

وحدات السلعة أ	المنفعـــة الحدية	المنفعة الــكلية
الأولى	١٠	١٠
الثانيـة	٩	١٩
الثالثة	٨	٢٧
الرابعة	٧	٢٤
الخامسة	٦	٤٠
السادسة	٤	٤٤

ويمكن إيجاد المنفعة الــكلية لأى عدد من وحدات السلعة ا بجمع أرقام المنفعة الحدية حسبما هو مبين بالجدول (١ — ١) . فالوحدة الثالثة من ا تعطى منفعة حدية قدرها ٨ ، وتعطى ٣ وحدات من ا منفعة كلية قدرها ٢٧ وحدة منفعة (١٠ + ٩ + ٨) .

ويصور الشكل (١ — ١) منحنيات المنفعة الكلية والمنفعة الحدية .



شكل (١ — ١)

والآن نعود إلى السؤال : كيف يفسر قانون تناقص المنفعة انحدار منحنى الطلب على سلعة من السلع إلى أسفل ؟

والحقيقة أن الإجابة واضحة . . فطالما أن الوحدات المتعاقبة من السلعة تعطى مقادير أقل وأقل من المنافع الحدية أو المنافع الإضافية ، فإن المستهلك لن يكون مستعداً لشراء وحدة إضافية من السلعة (والتى تعطى إشباعا أقل) مالم ينخفض سعر هذه الوحدة . فقد يقبل المستهلك على شراء وحدتين من السلعة ا عندما يكون السعر جنيه واحد للوحدة . ولكن نظراً لقانون تناقص المنفعة الحدية سيفضل هذا المستهلك عدم شراء وحدات إضافية من السلعة عند هـذا السعر . ذلك أن تنازله عن النقود يعنى فى الحقيقة التضحية بسلع أخرى . أى التحول عن طرق بديلة للحصول على المنفعة . ولهذا فإن الأمر لايستحق منه المحاولة مالم ينخفض سعر السلعة (التضحية بسلع أخرى) . ومن وجهة نظر

البائع ، نظراً لتناقص المنفعة الحدية يضطر المنتج إلى خفض السعر ليحصل المشترين على طلب كميات أكبر من السلعة .

نظرية سلوك المستهلك :

بالإضافة إلى دور فكرة تناقص المنفعة الحدية كأساس لتفسير قانون الطلب ، فهي تلعب دوراً رئيسياً فى إيضاح الكيفية التى يوزع بها المستهلك دخله النقدى بين العديد من السلع والخدمات المعروضة للشراء ..

اختيار المستهلك وقيد الميزانية :

يمكن تصوير حالة المستهلك العادى على النحو التالى :

١ — يفترض فى المستهلك العادى أن يكون رجلا رشيداً . وهو بذلك يحاول أن ينفق دخله النقدى بالطريقة التى تحقق له أكبر قدر من الإشباع أو المنفعة . ولا يعنى ذلك بالضرورة أن هذا المستهلك يستطيع على الدوام تحقيق أقصى قدر من المنفعة من دخله النقدى . فقد لا تتوافر لدى المستهلك المعلومات الكافية عن السلع المتاحة له وقد تدفعه كذلك العادات الاستهلاكية إلى اختيار نمط من الاستهلاك لا يحقق له أعظم إشباع .. وبجانب ذلك توجد عوامل أخرى تحمل المستهلك على اختيار نمط إنفاق لا ينتهى إلى تعظيم المنفعة . ولكننا سنحطات هنا ونفترض أن المستهلك العادى يرغب فى الحصول على أقصى ما يمكن من دخله .

٢ — كذلك نفترض أن المستهلك العادى على بينة من أمر تفضيلاته Preferences لمختلف السلع والخدمات المعروضة فى السوق، ويتوافر

لدى المشترين فكرة واضحة عن مقدار المنفعة الحدية التى يحصل عليها من الوحدات المتعاقبة لمختلف السلع التى قد يتجه إلى شرائها .

٣ — والدخل النقدى المستهلك محدود . ذلك لأن الموارد الاقتصادية التى يعرضها سواء أكانت موارد بشرية أو موارد مملوكة محدودة ومن ثم فإن مايحصل عليه من عوائد لقاء هذه الموارد سيكون محدوداً ، وسواء وجد المستهلك نفسه فى أعلى قائمة هرم الدخل أوفى القاعدة، فإن مايحصل عليه من دخل هو مبلغ معين . وباستثناء أفراد قلائل فى العالم . فإن المستهلك يواجه قيودا تفرضها ميزانيته المحدودة الدخل .

٤ — ويحدد للسلع والخدمات المعروضة على المستهلك أسعار تلصق بها ، فهذه السلع والخدمات نادرة بالنسبة للطلب عليها أو بعبارة أخرى ، يتطلب إنتاجها استخدام موارد نادرة ذات قيمة . وسوف نفترض فى مثالنا هذا أن أسعار المنتجات لاتتأثر بالكمية التى يشتريها المستهلك الفرد من سلع معينة حيث تسود المنافسة الكاملة فى جانب الطلب بالسوق .

وطبيعى ، إذا كان المستهلك يحمل فى جيبه عدد محدود من الجنيهات وتحمل المنتجات التى يرغب الحصول عليها أسعار معينة ، فإنه لن يستطيع إلا شراء كمية محدودة من هذه السلع ، فالمستهلك لايستطيع شراء كل شىء قد يرغبه طالما أن كل شراء يستنفذ جزءاً من دخله النقدى المحدود . وهذه النقطة الواضحة بالذات هى التى تقنع المستهلك الفرد بالحقيقة الاقتصادية للندرة .

والخلاصة أنه يتعين على المستهلك أن يقوم بعملية تسوية ، إذ يجب عليه أن يقوم بانتقاء والاختيار بين البدائل من السلع ليحصل من موارده النقدية المحدودة على مجموعة تحقق له أقصى إشباع .

قاعدة تعظيم المنفعة :

وأهم ما يعني المستهلك فى اختياره من بين المجموعات البديلة للسلع والخدمات هو البحث عن مجموعة السلع والخدمات التى يمكنه الحصول عليها من إنفاق دخله المحدود وتحقق له أقصى منفعة أو إشباع .. والقاعدة التى يتبعها فى تعظيم إشباعه هى أنه : يتعين على المستهلك أن يوزع دخله النقدى بحيث يعطى آخر جنيه أنفق على كل سلعة اشتراها نفس حجم المنفعة الإضافية . ويطلق على ذلك قاعدة تعظيم المنفعة . وعندما يوازن المستهلك بين هوامشه طبقا لهذه القاعدة فلن يكون لديه أى حافز على تغيير نمط إنفاقه . ويصل بذلك إلى التوازن ، وباستثناء تلك الظروف التى يتغير فيها أذواقه أو دخله أو أسعار مختلف السلع والخدمات ، سيلحق به الضرر (تنخفض منفعته الكلية) إذا قام بتغيير مجموعة السلع التى يشتريها .

ويمكن توضيح سلامة هذه القاعدة بإعطاء مثال تفصيلى .. وسوف نقتصر فى هذا المثال على دراسة سلعتين من أجل تبسيط العرض ، مع الأخذ فى الاعتبار أنه يمكن التوسع فى التحليل ليشمل أى عدد من السلع . ولنفرض أن أحد المستهلكين « أيمن » يحاول الوصول إلى قرار حول الخليط الذى يتعين عليه شراؤه من السلعتين س ، ص فى حدود دخله الأسبوعى البالغ قدره ١٠ جنيهات والواضح أن تفضيلات أيمن لهاتين السلعتين وأسعارهما ستكون بيانات أساسية فى تحديد الخليط من س ، ص الذى يعظم إشباعه ويلخص الجدول (١ — ٢) تفضيلات أيمن للسلعتين س ، ص . وتظهر المنفعة الحدية للوحدات المتعاقبة من السلعة س فى العمود ٢ أ . ويبين العمود ٣ أ تفضيلات أيمن للسلعة ص .

وتعكس العلاقة بين عدد الوحدات التى يحصل عليها من السلعة والمنفعة الحدية المناظرة قانون تناقص المنفعة الحدية . وتبدأ المنفعة الحدية فى الانخفاض ابتداء من الوحدة الأولى المشتراه من كل سلعة .

جدول (١ — ٢)

مجموعة السلع (س ، ص) التي تعظم المنفعة
بإنفاق دخل ١٠ جنيهات(*)

(١) وحدات السلعة	(٢) السلعة س : السعر = ١ ج		(٣) السلعة ص : السعر = ٣ ج	
	(ا) المنفعة الحدية	(ب) المنفعة الحدية الجنية (م ح/سعر)	(ا) المنفعة الحدية	(ب) المنفعة الحدية الجنيه (م ح/سعر)
الأولى	١٠	١٠	٢٤	٨
الثانية	٩	٩	٢١	٧
الثالثة	٨	٨	١٨	٦
الرابعة	٧	٧	١٥	٥
الخامسة	٦	٦	٩	٣
السادسة	٤	٤	٣	١

(*) يفترض في بيانات هذا الجدول أن المنفعة الحدية لكل وحدة مضافة من أي السلعتين مستقلة عن كميات السلعة الأخرى .

وقبل أن نبدأ فى تطبيق قاعدة تعظيم المنفعة على هذه البيانات ، يجب استخراج المنفعة الحدية بالنسبة للجنيه المنفق على النحو المبين بالأعمدة ٢ ب ، ٣ ت . ذلك لأن اختيار المستهلك لا يتأثر بالمنفعة الإضافية للوحدات المتعاقبة من السلعة س فقط ، ولكن يتأثر كذلك بعدد الجنيهات التى ينفقها (ومن ثم عدد الوحدات من السلعة البديلة ص) التى يتعين عليه التضحية بها فى سبيل الحصول على الوحدات المضافة من السلعة س .

والمثال الأول لذلك :

أن أيمن قد يفضل أن يملك سيارة كاديلاك عن تملكه لسيارة فورد . ومع ذلك قد يشترى سيارة فورد لأن الكاديلاك تتكلف ثلاثة أو أربعة أضعاف تكلفة السيارة الفورد . لذلك سيشعر أيمن أن شراء الفورد أفضل بالنسبة للجنيه المنفق .

والمثال الثانى :

يلاحظ من الجدول (١ — ٢) أن أول وحدة من السلعة ص تعطى ٢٤ وحدة منفعة بينما تعطى أول وحدة من س ١٠ وحدات منفعة فقط . ولكن تكاليف ص ٣ جنيهات للوحدة و س جنيه واحد . ويعنى ذلك أنه فى حالة تنازل أيمن عن الوحدة الأولى من ص ومن ثم التضحية بعدد ٢٤ وحدة منفعة ويمكنه توفير ٣ جنيهات يشترى بها ٣ وحدات من س تعطى له ٢٧ وحده اشباع . وبعبارة أخرى ، إذا كان لدى أيمن ٣ جنيهات وحدة للانفاق فإنه لن يوجهها إلى شراء السلعة ص بالرغم من ارتفاع منفعتها الحدية الأولى . وسيفضل شراء السلعة س . والأساس هنا أنه لكى يمكن المقارنة بين المنافع الحدية التى يحصل عليها المستهلك من شرائه للسلع ذات الاسعار المختلفة ، يتعين علينا استخراج المنافع الحدية بالنسبة للجنيه . ويظهر ذلك بالعمودين ٢ ب ، ٣ ب . وقد أمكن الحصول على هذه البيانات بقسمة بيانات المنفعة الحدية

بالعمودين ٢ أ و ٣ أ على أسعار السلعة س وأسعار السلعة ص . أى على ١ و ٣ على الترتيب .

وبعد استخراج بيانات تفضيلات المستهلك أيمن بالنسبة للوحدة وبالنسبة للجنيه . وعلى ضوء الاسعار المعطاة للسلعتين فإن لدى أيمن مبلغ ١٠ جنيهات يود إنفاقها فى شراء وحدات من س و ص . ولكن بأى ترتيب يتعين عليه توزيع هذه الجنيهات على وحدات من س ووحدات من ص بحيث يحقق أعلى درجة من المنفعة فى حدود دخله النقدى ؟ وما هى الكمية التى يشتريها من كل من س و ص والتى تستنفذ كل دخله (١٠ جنيهات) ؟ .

ونظرة إلى الأعمدة ٢ ب و ٣ ب بالجدول (١—٢) يتضح لنا أنه يتعين على أيمن انفاق أول جنيه على أول وحدة من س .. ولكن لماذا ؟ لأن المنفعة الحدية للجنيه ١٠ وحدات وهى أعلى من منفعة الوحدة الأولى من السلعة ص . ويتعين بعد ذلك على أيمن أن ينفق جنيه آخر فى شراء وحدة ثانية من س . والسبب أن المنفعة الحدية للجنيه المنفق على الوحدة الثانية من س (٩ وحدات منفعة) يزيد على المنفعة الحدية للجنيه المنفق على الوحدة الأولى من ص (٨ وحدات) ولكن أيمن يجد بعد ذلك أن انفاقه على الوحدة الثالثة من س سواء بالنسبة له مع انفاقه على الوحدة الأولى من ص . فكلاهما يعطى نفس المنفعة الحدية للجنيه (٨ وحدات منفعة) ولنفرض أنه قام بشراء كلاهما : يكون فى حوزة أيمن الآن ٣ وحدات من السلعة س ووحدة من السلعة ص . ويلاحظ أنه عند هذه التوليفة تتساوى المنافع الحدية لآخر جنيه ينفق على كل من السلعتين ولكن أهل يمثل هذا الوضع أقصى إشباع يمكن لأيمن الحصول عليه ؟ الإجابة لا .. لأن هذه المجموعة من السلعتين تكلف أيمن ٦ جنيهات « (٣ × ١ جنيه) + (١ × ٣ جنيه) » ، ويتبقى له ٤ جنيهات من دخله يمكنه استخدامها فى شراء المزيد من السلع ومن ثم مازالت أمامه فرصة لتحقيق مستوى أعلى من الاشباع الكلى .

وباعادة النظر فى الأعمدة ٢ ب و ٣ ب مرة ثانية ، نجد أن أيمن ليس لديه تفضيل بين اختيار الوحدات التالية من كل من السلعتين . أى ٤ وحدات من س ووحدتين من ص فالمنفعة الحدية للجنيه الذى ينفق فى شراء الوحدة الرابعة من س والذى ينفق فى شراء الوحدة الثانية من ص متساوية (٩ وحدات منفعة فى كل حالة) وبجانب تساوى المنافع الحدية لآخر جنيه ينفق فى كل من السلعتين ، فان المستهلك يستنفد كل دخله . . إذ ينفق مبلغ العشرة جنيهات بأكملها « (٤ × ١ جنيه) + (٢ × ٣ جنيه) » . لذلك فان المجموعة من السلعتين التى تحقق أقصى منفعة لأيمن هى ٤ وحدات من س و ٢ من ص .

وتجب الإشارة أنه توجد مجموعات أخرى من س و ص يمكن الحصول عليها باتفاق مبلغ العشرة جنيهات . ولكن لا يحقق أى منها مستوى إشباع يرتفع إلى مستوى الاشباع الذى تحققه ٤ وحدات من س ووحدتين من ص . فعلى سبيل المثال نجد أنه يمكن الحصول على وحدة من س وثلاثة وحدات من ص باتفاق ١٠ جنيهات ولكن هذه المجموعة تخل بقاعدة تعظيم المنفعة . فالمنفعة الكلية فى هذه الحالة تصل إلى ٧٣ وحدة منفعة وهى أقل من المنفعة الكلية ٧٩ وحدة التى تتحقق من شراء ٤ وحدات من س و ٢ من ص . كذلك هناك مجموعات أخرى من س و ص مثل ٥ وحدات من س و ٣ وحدات من ص أو ٣ من س و ١ من ص تتعادل عندها المنافع الحدية لآخر جنيه ينفق على كل منهما . ولكن هذه المجموعات أما يستحيل الحصول عليها فى حدود الدخل النقدى لأيمن (مثل ٥ وحدات من س و ٣ من ص) أو أنها لا تستنفد دخله النقدى (مثل ٣ وحدات من س و ١ من ص) ومن ثم فهى لا تحقق له أقصى منفعة ممكنة .

الصورة الجبرية لقاعدة تعظيم المنفعة :

يمكننا الآن إعادة صياغة قاعدة تعظيم المنفعة جبريا . إذ تقرر هذه القاعدة أن المستهلك سيعظم أشباعه إذا قام بتوزيع دخله النقدى بين السلع المختلفة بحيث

يعطى آخر جنيه ينفق فى شراء السلعة س ، وآخر جنيه ينفق فى شراء السلعة ص وآخر جنيه يوجه لشراء أى سلعة أخرى نفس مقدار المنفعة الحدية . ويرمز إلى المنفعة الحدية للجنيه المنفق على السلعة س ، بالرمز م ح للسلعة س / سعر السلعة س(العمود ٢ ب فى الجدول (١ — ٢) والمنفعة الحدية للجنيه المنفق على ص ، بالرمز م ح للسلعة ص / سعر ص(العمود ٣ب بالجدول(١—٢). لذلك فان قاعدة تعظيم المنفعة تعادل هذه النسب . . أى أن ،

$$\frac{\text{م ح السلعة س}}{\text{سعر س}} = \frac{\text{م ح السلعة ص}}{\text{سعر ص}}$$

ويتعين ، بالطبع ، أن يستنفذ المستهلك كل ما لديه من دخل . ويبين مثالنا فى الجدول (٢ — ٢) أن الخليط المكون من ٤ وحدات من السلعة س ووحدتين من السلعة ص يحقق هذه الشروط حيث :

$$\frac{٧}{١} = \frac{٢١}{٣}$$

ويستنفذ المستهلك كل دخله البالغ ١٠ جنيهات للحصول على هذه المجموعة .

وإذا لم تتحقق المعـــادلة ، ستجرى بعض التعديلات لإعادة توزيع انفاق المستهلك بين س و ص ، من السلعة المنخفضة المنفعة الحدية للجنيه إلى السلعة المرتفعة المنفعة الحدية للجنيه ومن ثم تزيد المنفعة الكلية للمستهلك . فعلى سبيل المثال يمكن للمستهلك أن ينفق عشرة جنيها على شراء وحدة واحدة من السلعة س و ٣ وحدات من السلعة ص . ولكننا نجد هنا أن :

(م ح للسلعة س: ١٠ وحدات) / (سعر س: ١ جنيه) > (م ح للسلعة ص: ١٨ وحدة) / (سعر ص: ٣ جنيه) .

حيث يعطى آخر جنيه منفق على السلعة س ١٠ وحدات منفعة ، بينما يعطى آخر جنيه ينفق على ص ٦ وحدات فقط للاشباع . وعلى أساس منفعة الجنيه ، فإن وحدات السلعة س تعطى اشباع إضافى أكبر من وحدات ص . والواضح ، بناء على ذلك أن المستهلك يزيد من اشباعه الكلى بشراء المزيد من س والقليل من ص . وكلما أعيد توزيع الانفاق من ص إلى س ستنخفض المنفعة الحدية للوحدات المضافة من س نتيجة للانتقال إلى أسفل جدول تناقص المنفعة الحديه للسلعة س، وتزيد المنفعة الحدية للسلعة س كلما انتقل المستهلك إلى أعلى جدول تناقص المنفعة الحدية للسلعة ص . وسوف يصل المستهلك إلى خليط جديد من السلعتين س و ص (٤ وحدات من س ووحدتين من ص) تتعادل عندها النسب ويتحقق بذلك توازن المستهلك . ويصبح صافى مايعود على المستهلك من زيادة فى المنفعة ٦ وحدات (٧٩ — ٧٣) .

ويوجه إلى نظرية سلوك المستهلك هذه ، عدد من الانتقادات ، وأكثر هذه الانتقادات وضوحاً أنه لايوجد لدينا « مقياس للمنفعة Utilometer » يمكن استخدامه فى تحديد تفضيلات المستهلك بالدقة الموضحة بالجدول (٢ — ٣) . كذلك لايمكن أن ندخل فى التحليل المنتجات الكبيرة الحجم والغير قابلة للتجزئة مثل المنازل والسيارات والبيانو ونفقات التعليم الجامعى .. ومع ذلك ، هناك ظلال من الشك تلقى حول إمكانية استخدام هذه النظرية فى وصف الأساس المنطقى لسلوك المستهلك بدقة . فالنظرية توضح ، بشكل عام ، كيف يتصرف المستهلكين . فهم يسعون (بطريقة غير دقيقة محكمة) ، إلى تعظيم اشباعهم . وقد يستخدمون طرق بدائية فى إجراء مقارنات هامشية عند توزيع دخولهم المحدودة . ويتعين على كل أسرة تقوم بإعداد ميزانيتها أن تختار بين

الحصول على ثلاجة ، مثلا ، لحفظ الغذاء أو جهاز تليفزيون أو قضاء الصيف بإحدى الشواطىء . كذلك فإن الطالب الجامعى يقارن الاشباع الذى يحصل عليه من انفاق ٥ جنيهات فى شراء قميص والاشباع الذى يحصل عليه من انفاق نفس المبلغ فى دعوة الاصدقاء للسينما فى نهاية الأسبوع . وبالرغم من القيود المحيطة بقاعدة تعظيم المنفعة إلا أنها تفيد فى إعطاء تصور عام للطريقة التى يتصرف بها المستهلكين .

الفصل الثانى

منحنيات السواء

استخدمنا فى الفصل السابق قانون تناقص المنفعة الحدية لتفسير قانون الطلب وخلصنا منه إلى قاعدة تعظيم الإشباع على أساس توزيع الموارد النقدية للمستهلك بطريقة تؤدى إلى تعادل المنافع الحدية للجنيه المنفق على أى من السلع المختلفة المعروضة فى السوق ، وبشرط أنه يستنفذ المستهلك كل دخله النقدى . واستلزمت طريقة التحليل افتراض قياس المنفعة بوحدات من الإشباع استخدمت كوسيلة لقياس قوة الإشباع .. ولما كانت المنفعة شىء حسى ذاتى يختلف من فرد لآخر فإنها غير قابلة للقياس الكمى .. إذ لا يمكن قياس الإحساس ولكن يمكن ترتيبه فقط . . فيمكن أن نقول أن شخص ما أسعد حالا اليوم مما كان عليه بالأمس ولكننا لا نستطيع قياس مقدار سعادته .. والمنفعة شأنها شأن السعادة لا يمكن قياسها ولكن يمكن ترتيبها فقط .. فالفرد قد يفضل التفاحة على البرتقالة ومن ثم تكون منفعة التفاحة أكبر من منفعة البرتقالة لهذا الفرد . ولكنه لا يستطيع أن يقدر حجم الإشباع الذى يحصل عليه من شراءه للتفاحة كمياً .

لذلك بنى الاقتصاديون التقليديون نظريتهم فى تحليل سلوك المستهلك على فكرة قابلية المنفعة للقياس الكمى وعرف ذلك بالمنفعة العددية Cardinal Utility ولكن هذا المدخل من مداخل التحليل الاقتصادى لاقى هجوما شديداً لاعتماده على مبدأ القياس .. ولكن لم يكن هناك مناص من الاستمرار فى افتراض قابلية المنفعة للقياس حتى قدم أحد الاقتصاديين الإيطاليين ويسمى باريتو Pareto أداة لتحليل سلوك المستهلك على أساس فكرة ترتيب المنفعة

دون التعرض لمشكلة القياس وعرف هذا المدخل بالمنفعة الترتيبية Ordinal Utility واستخدم فى ذلك بارينو منحنيات السواء .. ولم تكن فكرة منحنيات السواء جديدة على التحليل الاقتصادى .. فقد قدمها الاقتصادى الانجليزى إدجوارث Edgeworth لأول مرة فى نهاية القرن التاسع عشر . ولكن بارينو استخدمها بكثافة فى تحليل سلوك المستهلك . ولم يبدأ عهد القارىء الانجليزى بها إلا فى الثلاثينات فى كتابات ألن Allen وهيكس Hicks وأعادوا بذلك بناء نظرية سلوك المستهلك على أساس المنفعة الترتيبية . وحلت بذلك منحنيات السواء محل منحنيات تناقص المنفعة الحدية .

وانتهت نتائج التحليل المبنى على أساس المنفعة الترتيبية إلى نفس القواعد والشروط التى سبق وأن خلصت إليها النظريات المبنية على أساس المنفعة العددية فلم يكن المدخل الترتيبى للمنفعة إلا معالجة للنقد وتخفيفاً للهجوم الذى وجه لمدخل قابلية المنفعة للقياس الكمى .

التفضيل والسواء :

استطاع المحلل الاقتصادى أن يتغلب على مشكلة ضرورة قياس المنفعة كمياً ويستعيض عنها بترتيب المنافع .. فقد يفضل مستهلك وحده من السلعة أعلى وحدة من السلعة ب ويفضل كذلك ا على حـ .. وربما يعجز هذا المستهلك عن المفاضلة بين ب و حـ بحيث إذا طلب منه الاختيار بين وحدة من السلعة « ب » وأخرى من السلعه « حـ » ، فلن يستطيع أن يقرر أى منهما يختار فكلاهما بالنسبة له سواء .

لذلك فإنه يمكن التعبير عن أذواق المستهلك بفكرة التفضيل والسواء . فإذا أمكنه الاختيار بين سلعتين أو مجموعات من السلع ، فإنه يفضل أحدهما

على الآخر أو أنها تكون بالنسبة له سواء . ويلاحظ أن الغرض الوحيد هو أن المستهلك يفضل أو يستوى الأمر بالنسبة له .

جدول السواء : Indifference Schedules

يعرف تحليل المنفعة الترتيبية ، فى العادة ، بتحليل منحنى السواء لأن منحنيات السواء هى أداته الرئيسية للتحليل . وحتى يسهل فهم منحنيات السواء ، يفضل أن نبدأ بعرض جداول السواء .

وجدول السواء هو قائمة لمجموعات مختلفة من سلعتين . وترتب هذه القائمة بطريقة تجعل المستهلك لا يفضل أى مجموعة منها عن الأخرى بل كلها تكون سواء بالنسبة له ويحتوى الجدول (٢ — ١) على جدولين للسواء . وبالنظر إلى الجدول « ا » نجد أنه يشمل سلعتين س وص ولقد اقتصرنا على سلعتين فقط حتى يمكن تصوير التحليل بيانيا باستخدام إحداثين فقط ، ويحتاج تحليل أكثر من سلعتين إلى استخدام أساليب رياضية متطورة .

جدول (٢ — ١)

جداول السواء

« ا »		« ب »	
س	ص	س	ص
١٠	صفر	١٢	صفر
٧	١	١٠	١
٥	٢	٨	٢
٤	٤	٦	٤

ويبنى جدول السواء على أساس تصور المستهلك يفكر فى مجموعات مختلفة من وحدات السلعة « س » والسلعة « ص » ففى الجدول « ا » تتمثل هـذه المجموعات فى ١٠ وحدات من السلعة « س » وصفر من السلعة « ص » أو ٧ وحدات من « س » ووحدة واحدة من « ص » ... الخ ، فالمستهلك يرغب فى الحصول على كلا السلعتين ولكن المسأله تختص هنا بتحديد العلاقة بين رغباته وبين كميات السلعتين ، ففى الجدول « ا » رتبت كميات السلعة « س » والسلعة « ص » بصورة تجعل المجموعات المختلفة من السلعتين سواء بالنسبة للمستهلك ، فلا يفضل أحدهما على الأخرى . فكل واحدة منها تشبع نفس الرغبة ، ويجد المستهلك نفسه فى مستوى واحد من الإشباع بصرف النظر عن أى من هـذه المجموعات يختار .

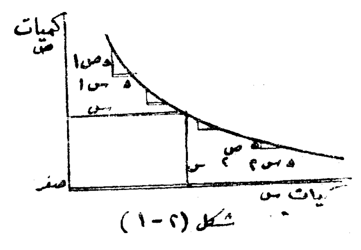
كذلك ، فإن أى مجموعة من المجموعات الموضحة بالجدول « ب » تشبع نفس الرغبة التى تعطيها أى مجموعة أخرى بالجدول ، ويبدأ هـذا الجدول بعدد ١٢ وحدة من السلعة « س » ولاشىء من السلعة « ص » ، وبافتراض أن الكمية الأكبر من السلعة تفضل على الكمية الأقل ، فإن أى مجموعة من مجموعات الجدول « ب » تفضل عن أى مجموعة بالجدول « ا » .

وللتوسع فى هذه النقطة ، نفترض أن هناك مستهلك يحب سلعتين ، اختار بطريقة عشوائية مجموعة من هاتين السلعتين تمثل عدد معين من أحدهما وعدد من السلعة الأخرى والحقيقة أنه لابد وأن تكون هناك مجموعات أخرى من السلعتين تعطى للمستهلك نفس الإشباع (أى سواء بالنسبة له) . وبالرغم من أن الجدول (٢—١) احتوى على جدولين فقط للسواء ، إلا أنه يمكن إضافة جداول أخرى حـ ، ء ، هـ ... الخ ، كذلك يمكن أن نضيف مجموعات أخرى تمثل خليط من السلعتين « س و ص » .. إذ يمكن أن يمتد التصور إلى تلك النقطة فى العمود « س » التى تصل فيها كميات « ص » إلى الصفر .

منحنيات السواء :

والآن ننتقل إلى النقطة الثانية . . بتحويل جداول السواء إلى منحنيات السواء . أى ننتقل من التحليل العددى إلى التحليل البيانى .. وفى هـذا يجرى توفيق منحنيات ممهدة بدلا من الانتقال من رقم إلى رقم آخر ، وبذلك نفترض أن المجموعات المختارة يمكن تقسيمها إلى وحدات صغيرة جداً .

ويظهر منحنى السواء فى الشكل (٢ — ١) حيث يقيس الإحداثى الأفقى عدد وحدات السلعة « س » ، بينما يقيس الإحداثى الرأسى وحدات السلعة «ص» وتمثل أى نقطة على المنحنى خليط من كميات « س و ص » ، فعند النقطة « أ » مثلا نجد أن عدد الوحدات من «س وص » تظهر فى الخطوط « س و ص »والتى تمثل البعد عن الإحداثى الأفقى والرأسى ، ويمر منحنى السواء بالنقطة « أ » ومن ثم فإن أى نقطة أخرى على نفس المنحنى تحقق نفس مستوى الاشباع ، وتعطى كميات مختلفة من وحدات السلعة « س » والسلعة « ص » فلو عرض على المستهلك الاختيار بين المجموعات المختلفة على منحنى السواء فإنه لن يفضل أى منهما على الأخرى فالانتقال من مجموعة إلى أخرى يشرك المستهلك على نفس المستوى من الإشباع .. ولن يختلف الأمر سواء انتقل المستهلك من أعلى إلى أسفل منحنى السواء أو انتقل من أسفل إلى أعلى فإن مستوى إشباعه يظل كما هو فجميع النقط الواقعة على منحنى السواء تترك إشباع المستهلك كما هو دون تغيير .. فهى بالنسبة له جميعاً سواء .



شكل (٢ - ١)

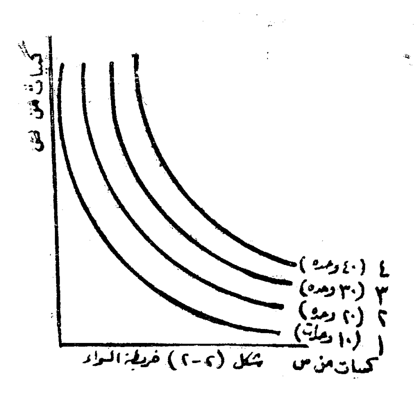
ولكن لماذا يأخذ منحنى السواء شكله المبين بالرسم (٢ — ١) ؟ إذ يلاحظ أن المنحنى يميل إلى الانحدار بدرجة أكبر نسبياً فى الجزء العلوى منه عن انحداره فى الجزء الأسفل .. فبينما الانحدار شديد فى الجزء العلوى يميل المنحنى إلى التسطح (الانبطاح) فى الجزء الأسفل . أى أن المنحنى محدب convex تجاه نقطة الأصل . ولتفسير ذلك ، نفترض أن المستهلك ينتقل من أعلى المنحنى فى الشكل (٢ — ١) إلى أسفل .. ويلاحظ أنه كلما فعل ذلك كلما تنازل عن كمية من السلعة (ص) مقابل الحصول على كمية من (س) فى خياله بالطبع . ويعنى انتقال المستهلك إلى أسفل المنحنى ، أنه يبادل وحدات من(ص) مقابل وحدات من (س) بشرط أن وضعه لن يتأثر بهذا الانتقال فأى خليط أو مجموعة من السلعتين يصل إليها تعطى له نفس الإشباع ومن ثم لا يتحسن حاله ولا يسوء نتيجة لهذا التغير .

فعند الانتقال من أعلى المنحنى ، يتنازل المستهلك عن △ ص١ من السلعة (ص) مقابل △ س١ من السلعة (س) . ويلاحظ أن المستهلك ، حينئذ لديه الكثير من السلعة (ص) والقليل من السلعة (س) . ولهذا يكون على استعداد لمبادلة الكمية △ ص١ من السلعة (ص) مقابل الحصول على الكمية △ س١ من السلعة (س) . لذلك نجد أن طول المسافة التى تصور التغير △ ص١ على المنحنى أكبر من طول △ س١ (فى الجزء العلوى من المنحنى) . ولكن كلما انتقل المستهلك إلى أسفل المنحنى ، تتغير الكميات النسبية من (س و ص) . ففى الشكل (٢ — ١) تعمدنا تثبيت طول التغير △ س ، وقصدنا بهذا التماثل فى طول الجزء △ س أن نبين عدد الوحدات من (ص) الذى يرغب المستهلك فى التنازل عنها مقابل نفس العدد من وحدات السلعة (س) كى يحافظ على مستوى إشباعه . لذلك نجد أن أطوال الجزء الذى يشير إلى التغير فى كمية السلعة (س) △ س لا يتغير بانتقال المستهلك على المنحنى بينما تتناقص أطوال الأجزاء المشيرة إلى التغير فى كميات ص (△ ص) كلما اتجه المستهلك إلى أسفل المنحنى .

ويدل ذلك على أن المستهلك عندما يتوافر له الكثير من السلعة (س) والقليل من السلعة (ص) يضحى بكمية قليلة من (ص) مقابل الحصول على نفس عدد الوحدات من السلعة (س) وتجدر الإشارة هنا إلى أن أطوال حدود التغير △ص٢ في أسفل المنحنى قصيرة للغاية.

ويسمى المعدل الذى يبادل به المستهلك السلعة (ص) بالسلعة (س) معدل الإحلال الحدى . فكلما تدرج المستهلك إلى أسفل المنحنى كلما كان على استعداد للتنازل عن كميات أقل وأقل من السلعة (ص) للحصول على كمية معينة من السلعة (س) ومن ثم يتناقص معدل الإحلال الحدى . ويتناقص ، كذلك ، فى الاتجاه الآخر ، ذلك لأنه حين ينتقل المستهلك إلى أعلى المنحنى يكون على استعداد لمبادلة كميات متناقصة من السلعة (س) مقابل إضافة كميات متساوية من السلعة (ص) .

ويلاحظ أننا استخدمنا ، حتى الآن ، منحنى واحد للسواء ، ولكن العرض الكامل لأذواق المستهلك عن سلعتين يتطلب استخدام خريطة السواء تطابق مجموعة كامله من جداول السواء ويحتوى مجال الرسم على عدد لا نهائى من النقط . وحيث أن منحنى السواء يمر خلال كل نقطة ، فإن عدد منحنيات السواء يكون ، بناء على ذلك ، لا نهائى . ويبين الشكل (٢ — ٢) عدة منحنيات سواء تمثل فى مجموعها خريطة السواء للمستهلك . ويبين كل منحنى مجموعات من (س) و (ص) تلقى نفس درجة التفضيل لدى المستهلك . وكل منحنى يقع يمين منحنى آخر . يعتبر أعلى منه — أى أنه يعطى منفعة أكبر .



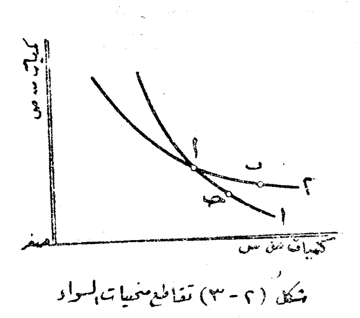
شكل (٢-٢) خريطة السواء

وكل مجموعة تقع على منحنى السواء الأعلى تكون أفضل من أى مجموعة على منحنى ينخفض عنه . ويعنى السواء هنا أن المستهلك يستطيع التحرك إلى أعلى أو إلى أسفل أى منحنى من هذه المنحنيات ، بينما يعنى التفضيل الانتقال تجاه الشمال الشرقى إلى مستويات أعلى للمنفعة .

ويمثل المنحنى (١) بالشكل (٢ — ٢) المجموعات المختلفة من السلعتين (س) و (ص) التى قد تحقق أشباع قدره ١٠ وحدات منفعة لشخص ما . كذلك فإن المنحنيات (٢)و(٣) و (٤) تمثل كل المجموعات التى تعطى درجات من الإشباع قدرها ٢٠ و ٣٠ و ٤٠ وحدة منفعة على التوالى ، على أن تقدير حجم الإشباع بعدد معين من وحدات المنفعة ليس بذات أهمية فالمهم أن يكون هناك ترتيب معروف للأفضلية والسواء ، فكل الميزانيات التى تقع على نفس منحنى السواء متساوية ، بينما تفضل كل الميزانيات التى تقع على منحنى أعلى .

ومنحنيات السواء لا تتقاطع أو يلامس بعضها الآخر . فلو حدث ذلك

لفقدت تفضيلات المستهلك إتساقها . أو بالتعبير الفنى « الإنتقالية Transitivity »
ويعنى تعبير الإنتقالية (أنه إذا كان المستهلك يفضل (أ) على (ب) ويفضل (ب) على (حـ) ، فإنه يفضل كذلك (أ) على (حـ) . وإذا كانت (أ) و (ب) سواء بالنسبة له وكذلك (ب) و (حـ) سواء ، فإن (أ) و (حـ) لابد وأن تكون سواء كذلك . وأمامنا مثال لحالة منحنيين للسواء يتقاطعان (فى الشكل ٢ — ٣) عند النقطة (أ) والتى تعبر عن خليط من عدد معين من وحدات السلعة (س) وعدد معين من وحدات السلعة (ص) ولما كانت (أ) و (حـ) تقعان على نفس منحنى السواء (١) فكلاهما يعطى نفس المنفعة . كذلك فإن (أ) و (ب) تقعان على المنحنى (٢) . . ولكن الواضح من الرسم أن (ب) تفضل على (حـ) لأن (ب) تحتوى على وحدات أكبر من كلا السلعتين (س) و (ص) . . . كذلك فإن المجموعة (ب) لا يمكن أن تعطى منفعة أكبر من (حـ) وفى نفس الوقت تعطى نفس المنفعة التى تحققها (حـ) .



شكل (٢ - ٣) تقاطع منحنيات السواء

ومن الناحية الأخرى ، كان يمكن للشكل (٢ — ٣) أن يمثل اختياراً رشيداً ، لو تخيلنا أن المنحنيين يقعان فى فترتين مختلفين من الزمن يتغير خلالهما نموذج تفضيلات المستهلك . فالتغير من المنحنى (١) إلى المنحنى (٢) يعنى أن

الرغبة فى السلعة (ص) ، أصبحت أقوى . وميل المنحنى (٢) أقل . فى الفترة الزمنية الثانية يكون المستهلك على استعداد لمبادلة كميات أقل من (ص) عن ذى قبل للحصول على وحدات أكثر من (س) .

الصور المختلفة لمنحنيات السواء :

إن أهم شرط يقيد شكل منحنى الطلب هو ميله إلى أسفل تجاه اليمين ليعبر عن العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة والسعر . كذلك فإن الشرط الأساسى الوحيد لشكل منحنيات السواء هو ضرورة تحدبها تجاه نقطة الأصل . فتناقص معدل الإحلال الحدى للسلعة (ص) محل (س) وللسلعة (س) محل (ص) يجعل المنحنى محدب . وفى نطاق هذا القيد يوجد العديد من الأشكال المختلفة للمكن رسمها لمنحنيات السواء . وتعكس هذه الأشكال المتنوعة الاختلافات فى ذوق المستهلك . فأذواق أى مستهلك لزوج من السلع المختلفه تختلف من زوج منها إلى زوج آخر . ولكل مستهلك أذواق مختلفة لنفس السلعتين .

فى حالة سلعتين كل منهما بديل كامل الآخر . مثل التعريفة والقرش ساغ نجد إن كلا منهما يكون بديل الآخر (للاستعمال فى أغراض كثيرة) بنسبة ثابتة ٢ : ١ ومن ثم يكون شكل منحنى السواء خط مستقيم . ولكن عندما يستخدم شخص ما عداد الانتظار فى أماكن انتظار السيارات . . ويحتاج إلى قروش صاغ لأن العداد لا يستخدم إلا القروش فقط وليس به مكان للتعريفة فإن هذا الفرد لابد وأن يتأكد من أن الفكة التى معه تحتوى على قرش أو قرشين صاغ على الأقل . ومنحنى السواء للقرش والتعريفه فى هذه الحالة يميل بنسبة تقترب من ٢ : ١ أو ينحنى انحناءة هادئة .

ومنحنيات السواء للسلع المكملة بعضها البعض بنسبة ثابتة ١ : ١ منحنيات

لهما زاوية قائمة . ومثال هذه السلع الفردة اليمنى والفردة اليسرى من زوج الأحذية إذ لا يتحسن وضع المستهلك عندما يحوز زوج أو أكثر من الفردة اليمنى إذا كان لديه فردة واحدة يسرى . والعكس صحيح . ولكنه يكون فى وضع أفضل عندما يحصل على المزيد من أزواج الأحذية ، وبذلك يتحرك فى الاتجاه الشمال الشرقى على خريطة السواء .

لذلك فإن منحنيات السواء فى تحدبها تجاه نقطة الأصل تأخذ أى شكل من الأشكال المختلفة التى تقع بين هذين الاستثنائين لحالة خط السواء المستقيم ، وحالة المنحنى ذى الزاوية القائمة . وترسم خرائط السواء ، فى الغالب ، على النحو الذى تبدو فيه منحنيات السواء وكأنها متوازية . غير أن هذا التوازى خاوى من كل مغزى إقتصادى(١) . فقد يغير منحنى السواء شكله العام فى المناطق المختلفة لمجال الشكل البيانى . فالانتقال إلى اتجاه الشمال الشرقى هو تحرك تجاه مجموعات من السلعتين أكثر تفضيلا . وهو تحرك نحو كميات أكبر من كلا السلعتين . والمزيد من كلا السلعتين يعنى استخدامات أكثر وأكثر لهذه السلع فإذا كانت السلعتين (س) و (ص) هما التفاح والكمثرى مثلا فإن زيادة كمياتهما تعنى زيادة كميات التفاح الموجهة إلى صناعة مربة التفاح مثلا ، وإمكانية زيادة كميات الكمثرى الموجهة فى شكل هدايا إلى الأصدقاء . ولهذا فإن علاقة التفاح والكمثرى قد تختلف عند الكميات الكبيرة عنها عند الكميات القليلة .

---

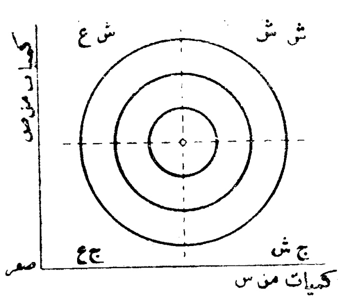
(١) يستثنى من ذلك الحالات التى تكون فيها منحنيات السواء متوازية فى الاتجاه الشمالى الجنوبى ، فيكون أثر الدخل مساوى للصفر وسوف نعالج هذه النقطة فيما بعد .

Utility and Disutility المنفعة واللامنفعة

إن الاشكال المألوفة لمنحنيات السواء والتى يغلب استخدامها فى نظرية سلوك المستهلك تأخذ الطابع الذى يظهر بالأشكال (٢ — ١) ، (٢—٢) ولا يبين الشكل العادى لمجموعة منحنيات السواء المحدبة أقصى منفعة . ولكنه يتضمن أنه يترتب على زيادة كميات (س) و (ص) زيادة فى المنفعة. كذلك لايبين الشكل اللامنفعة (أى المنفعة الحدية السالبة) ، والتى تعنى أن الزيادة فى أى شىء تعطى منفعة كلية أقل .

وقد يكون من المفيد أن نلقى بعض الضوء على مفهوم اللامنفعة . ولنفرض أن السلعة التى تعطى منفعة حدية موجبة تسمى (منفعة والسلعة التى تعطى منفعة حدية سالبة تعرف بـ (اللامنفعة) . وطبيعى أن المستهلك يرغب فى الحصول على المزيد من سلع المنفعة وقليل من سلع اللامنفعة .

ويعرض الشكل (٢ — ٤) المنفعة واللامنفعة. ولنتصور أننا أخذنا مسقط عمودى لشكل مخروطى على صفحة هذا الكتاب . فسيكون مركز الدوائر هو قمة هذا المخروط والذى يمثل للسهولة ، مخروط دائرى قائم يمكن الحصول عليه بإدارة المثلث قائم الزاوية دورة كاملة ، ويكون أحد أضلاعه بمثابة أحداثى ، لذلك فإن الدوائر التى تظهر فى الشكل (٢ — ٤) . (إذا كان شكل المخروط غير منتظم ، سنستبدل الدوائر بمنحنيات غير منظمة كذلك) . وسيكون ارتفاع المخروط (الأحداثى الثالث فى مخيلة القارىء) هو المنفعة . وقمة المخروط هى أقصى منفعة . وتمثل الدوائر مستويات المنفعة ، حيث تبين الدوائر الخارجية المستويات المنخفضة .



شكل (٢-٤) المنفعة واللامنفعة

وتقسم الخطوط المتقطعة الشكل (٢ — ٤) إلى أربعة أجزاء وفى الجزء الواقع بإتجاه الجنوب الغربى (جـ — غ) تكون كميات كلا السلعتين (س ص) صغيرة وبينهما تكون كميات السلعة (س) صغيرة في جانب الشمال الغربى إلا أن كميات (ص) تكون كبيرة وعلى العكس من ذلك فى القطاع الجنوبى الشرقى وفى القطاع الشمالى الشرقى تكون كميات (س و ص) كبيرة .

وبالنظر إلى الجزء الجنوبى الغربى نجد أن أجزاء الدوائر الواقعة فى هـذا القطع الدائرى هى منحنيات السواء للسلعة «س» و «ص» تمثـل كلاهما منافع الـكميات المبينة . وهنا نجد أن منحنيات السواء سالبه الميل ومحدبة . وأى تحرك أفقى (زيادة س) أو رأسى (زيادة ص) أو إلى أعلى تجاه اليمين (زيادة كل من « س » و « ص ») هو تحرك إلى دائرة داخلية ومن ثم انتقال إلى مستوى أعلى للمنفعة .

وفى الجزء الشمالى الشرقى نجد أن كلا السلعتين «س» و «ص» هى لا منفعة فانخفاض كميات هاتين السلعتين ينقل المستهلك إلى مستويات أعلى من المنفعة .

ويجب ملاحظة أن منحنيات السواء فى الجزء الشمالى الشرقى وأن كانت سالبة الميل إلا أنها مقعرة وليست محدبة .

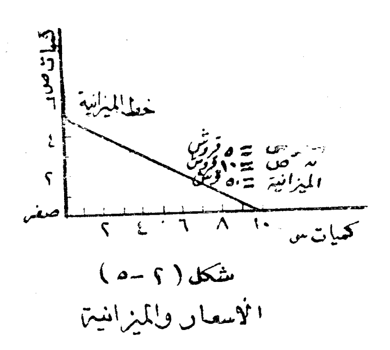
الأسعار وميزانية المستهلك :

إذا توفر لكل مستهلك دخل نقدى غير محدود — أو بعبارة أخرى إذا اتيح له مجمع من الموارد غير محدود — لن تكون هناك مشاكل اقتصادية أو ضرورة لوجود علم الاقتصاد . ولكن هذه الحالة الخيالية ليس لها وجود فى الواقع ، حتى بالنسبة لأغنى أفراد المجتمع . فالأفراد يلجأون إلى تحديد مجرى سلوكهم فى ضوء الموارد المالية المحدودة . ويعنى ذلك بالنسبة لنظرية سلوك المستهلك أن لكل مستهلك حد أقصى لما يستطيع أن ينفقه فى الفترة الزمنية . وتنحصر مشكلة المستهلك فى انفاق هذا القدر بالطريقة التى تحقق له أقصى أشباع .

ويمكن تحديد مشتروات المستهلك إذا توافرت لدينا المعلومات عن الأسعار وميزانيته وأذواقه . ومن مميزات منحنيات السواء أنها تجمع فى شكل واحد تمثيل هذه المتغيرات الثلاث .

ويبين الشكل (٢ — ٥) كيفية عرض الأسعار وميزانية المستهلك بيانياً . ولنفرض أن سعر السلعة «س» هو ٥ قروش لكل وحدة وسعر السلعة «ص» ١٠ قروش للوحدة ، وأن ميزانية المستهلك تقدر بمبلغ ٥٠ قرش للفترة الزمنية . لهذا يستطيع المستهلك أن يشترى ١٠ وحدات من السلعة «س» إذا انفق كل ميزانيته على السلعة «س» ويستطيع أن يشترى ٥ وحدات من السلعة «ص» إذا انفق كل مبلغ الميزانية (٥٠ قرش) على «ص» ويبين الخط الذى يصل بين « ١٠ س » و « ٥ ص » كل امكانيات انفاق الميزانية على السلعتين بالأسعار

المحددة . هذا الخط المستقيم هو خط الميزانية[1] . ونظرة إلى الشكل (٢ – ٥) ، تبين أن المستهلك يستطيع شراء « ١٠ س » و « صفر ص » أو « ٨ س » و « ١ ص » أو « ٤ س » و « ٣ ص » ، ... الخ . ولذات الموضوع يستطيع أيضاً شراء أى كمية داخل المنطقة المظللة .



شكل (٢ – ٥)
الأسعار والميزانية

ولكنه حين يفعل ذلك ، فإنه لا ينفق كل مبلغ الخمسون قرشا . وتجدر الإشارة إلى أن الشكل المعروض بين كميات السلعتين «س» و «ص» فقط . وتمثل الكميات الأسعار والميزانية بطريقة غير مباشرة . ويمكن النظر إلى خط الميزانية باعتباره حداً للفرص المتاحة أمام المستهلك للحصول على «س» و «ص» .

---

(١) والاصطلاح الذى يطلق على هذا الخط ليس نمطياً . إذ توجد أسماء أخرى فى الكتابات الاقتصادية لخط الميزانية ، فيسمى أحياناً قيد الميزانية وأحياناً أخرى خط امكانيات الاستهلاك أو خط الانفاق أو خط السعر — والدخل .

ويتحدد ميل خط الميزانية بنسبة أسعار السلعتين . وتكون هذه النسبة هي

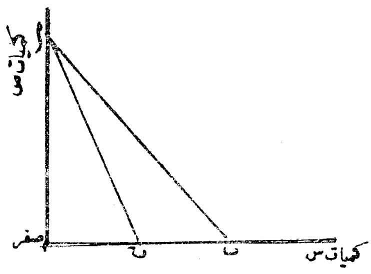
$\frac{\text{ع س}}{\text{ع ص}}$ أى سعر (س) مقسوما على سعر (ص) . وقد تبدو هذه النسبة لأول وهلة محيرة ، ذلك لأن الميل رأسى مقسوما على أفقى . ولكن (س) و (ص) عبارة عن كميات حقيقية ، ولهذا فإنه بالنسبة لأى خط ميزانية :

$$\text{الميل} \; \frac{\text{كمية السلعة ص}}{\text{كمية السلعة س}} = \frac{\text{الميزانية}}{\text{ع ص}} \Big| \frac{\text{الميزانية}}{\text{ع س}} = \frac{\text{ع س}}{\text{ع ص}}$$

وباستخدام الأرقام التى سقناها فى مثالنا البسيط السابق :

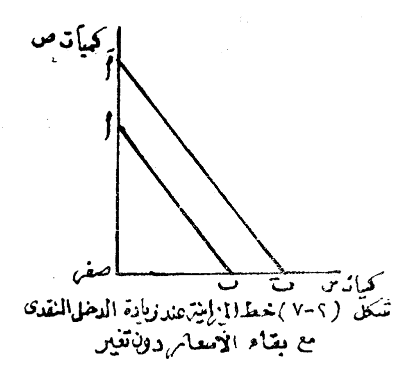
$$\text{الميل} = \frac{٥}{١٠} = \frac{٥٠}{١٠} \Big| \frac{٥٠}{٥} = \frac{٥}{١٠}$$

فإذا تعادل السعران ، أمكن شراء كميات متساوية من السلعتين بانفاق الميزانية . وسيكون ميل خط الميزانية مساوى للوحدة . فإذا كان الميل أقل من الوحدة ، سيكون سعر (س) هو الأقل ، وإذا كان الميل أكبر من الواحد ، سيكون سعر (ص) هو الأقل .



شكل (٢-٦) خط الميزانية عندما يزيد سعر "س" بينما يظل سعر "ص" والدخل النقدى دون تغير

وسيعتمد موضع خط الميزانية على حجم الميزانية ، فإذا زادت الميزانية انتقل الخط إلى اليمين . وتظهر التغيرات فى الأسعار وحجم الميزانية فى صورة تغير فى ميل موضع خط الميزانية .



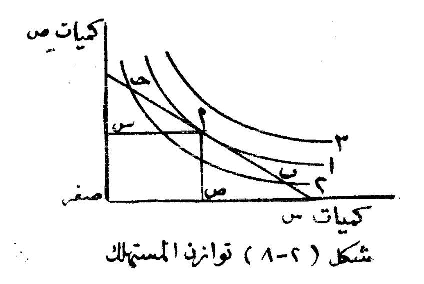
شكل (٢-٧) خط الميزانية عند زيادة الدخل النقدى
مع بقاء الأسعار دون تغير

وحتى يخدم التحليل العديد من الأغراض ، يحسن تمثيل كميات أحد السلع على الاحداثى الأفقى بينما نقيس الدخل النقدى فى فترة زمنية معينة على الاحداثى الرأسى لذلك فإن (س) تمثل السلعة و (ص) تمثل الدخل النقدى . وطبقاً لذلك فإن (ص) تعبر فى الحقيقة عن بقية السلع الأخرى . ومن ثم فإننا نقارن سلعة واحدة (س) بالسلع الأخرى الذى يعبر عنها بالدخل النقدى .

توازن المستهلك

المفروض أن كل المجموعات السلعية فى المسطح الذى يجمع هذه المجموعات متاحة للمستهلك ، بمعنى أنه قد يشتريها إذا استطاع . وتنشأ خريطة السواء المستهلك ترتيب لهذه المجموعات . ويحدد دخل المستهلك النقدى الثابت مستوى ميزانية المستهلك ، ويبين المجموعات التى يستطيع شرائها . والفرض الأساسى هنا أن كل مستهلك يحاول أن يعظم اشباعه من دخله النقدى ، ويعنى ذلك ببساطة أنه يتعين على المستهلك أن يختار أكثر مجموعة سلعية تفضيلا فى مستوى ميزانيته ولذا يكون السؤال هو : ما هو حجم ما يشتريه المستهلك من كل من (س) و (ص) ؟ والمعروف أن تلك الكميات من السلعتين التى تحقق له أعظم أشباع طبقا لما يقدره من تحسن فى وضعه . وحينئذ لا تكون لديه أى رغبة فى تغيير مشترياته ولذلك يكون فى حالة توازن.

ويظهر خط الميزانية فى الشكل (٢ — ٨) فى صورة خط مستقيم يبين ميله الأسعار وموضعه حجم ميزانية المستهلك . ولقد اخترنا ثلاثه منحنيات للسواء



شكل (٢-٨) توازن المستهلك

من بين المنحنيات التي تكون خريطة سواء المستهلك . ويكون المستهلك فى حالة توازن عند النقطة (ا) ، والتى تقع على خط الميزانية وكذلك تقع على منحنى السواء (١) والذى يكاد يلمس (يمس) خط الميزانية . والفرص المتاحة أمام المستهلك هى تلك التى تقع على خط الميزانية أو تقع أسفل هذا الخط . ويرغب المستهلك أن يصل إلى أعلى منحنى سواء يمكن الوصول إليه. وهذا هو المنحنى(١) الذى يمس خط السعر . ولهذا تفضل مجموعة وحدات (س) و (ص) عند النقطة أ عن أية مجموعات أخرى يمكن الحصول عليها . فإذا أراد المستهلك أن يشترى كمية أقل من (ص) وكمية أكبر من (س) سينقل إلى النقطة (حـ) ، ولكنه سينقل إلى منحنى سواء أقل (المنحنى ٢) وإذا اتجه إلى عكس ذلك وانتقل إلى أسفل إلى النقطة (ب) فإنه يصل كذلك إلى منحنى سواء منخفض (المنحنى ٢ — مرة أخرى) . وطبيعى أن المستهلك كان يفضل الوصول إلى منحنيات سواء أعلى مثل المنحنى (٣) . ولكنه لا يستطيع الوصول إليه لأن ميزانية منخفضة لا تسمح له بتحقيق هذا المستوى من الاستهلاك ، أو لأن الأسعار مرتفعة جداً ، أو لكلا السببين معاً .

ويحقق المستهلك أقصى منفعة عند النقطة (ا) فى الشكل (٢ — ٨) . غير أن هذا يعتبر تعظيم مقيد « مقيد بميزانية محددة وبالأسعار التى يتعين عليه سدادها » .

وعندما يكون المستهلك عند التوازن ، يكون أعلى منحنى سواء يمكنه الوصول إليه متماساً مع خط الميزانية . ولذلك فإن ميل المنحنى يساوى ميل خط الميزانية . ولكن هل يكون لهذا التعادل فى الميل أى مغزى اقتصادى ، نعم .. أن ميل منحنى السواء هو :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

ويعنى أن التغير فى (ص) مقسوماً على التغير فى (س). وهـذا هو الميل الحدى للإحلال — م ح ح. ولنفرض أن التغير هو تحرك ضئيل إلى أسفل منحنى السواء.

لذلك فإن :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} \text{ أو } م ح ح$$

يعنى خسارة بسيطة فى (ص) مقسومة على مكسب صغير فى (س). ولـكن منفعة الخسارة تساوى منفعة المكسب طبقاً لتعريف منحنى السواء.

ولهذا فإن :

$$\Delta ص \times م ح ص = \Delta س \times م ح س$$

أى أن الخسارة فى (ص) مضروبة فى المنفعة الحدية للسلعة (ص) تساوى المكسب من (س) مضروبة فى المنفعة الحدية للسلعة (س)، ويمكن تحويل هذه المعادلة إلى الصورة :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{م ح س}{م ح ص}$$

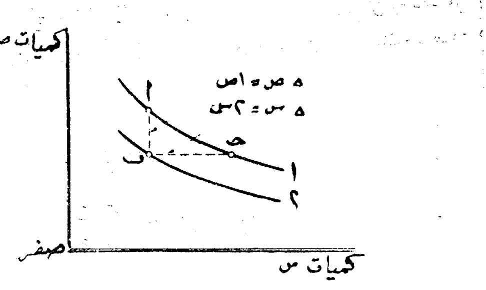
أى أن ميل المنحنى يساوى نسبة المنافع الحدية.

وحتى يتضح السبب فى أن :

$$م ح ح = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{م ح س}{م ح ص}$$

يجب أن ننظر إلى الشكل (٢ — ٩). فعند النقطة (أ) يكون ميل منحنى السواء (١) هو (بالتقريب) :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص ١}{س ٢}$$



شكل (٢-٩)
ميل منحنى السواء

فإذا كان المستهلك عند النقطة (ا) ويتنازل عن وحدة من السلعة (ص) فإنه ينتقل بذلك إلى أسفل إلى النقطة (ب) على منحنى السواء (٢) ولكن المنحنى (٢) أكثر انخفاضاً . ويعتبر الانتقال من النقطة (ا) إلى النقطة (ب) خسارة في المنفعة . ويعوض المستهلك عن الخسارة عندما يكسب وحدتين من س بالانتقال إلى النقطة (حـ) على المنحنى (١) .

أى أن المنفعة المفقودة نتيجة للتنازل عن وحدة من (ص) يستعيض عنها بالحصول على وحدتين من السلعة (س) . . .

ولهذا فإن :

م ع لوحدتين من س = م ع لوحدة من ص أو

م ع لـ ١ س = ½ م ع لوحدة من ص أو

$$\frac{\text{م ع س}}{\text{م ع ص}} = \frac{1}{2}$$

فإذا احتاج المستهلك إلى وحدتين من (س) يعوض بها عن وحدة من (ص) ، فإن المنفعة الحدية لوحدة من (س) تساوى نصف منفعه وحدة واحدة من (ص) .

ويكون ميل خط الميزانية هو :

$$\frac{\text{ع س}}{\text{ع ص}}$$ عند نقطة التوازن .

وطبقا لذلك فإن :

$$\text{م ح ح} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta\,\text{س}} = \frac{\text{م ح س}}{\text{م ح ص}} = \frac{\text{ع س}}{\text{ع ص}}$$

ولهذا فإن :

$$\frac{\text{م ح س}}{\text{ع س}} = \frac{\text{م ح ص}}{\text{ع ص}}$$

ويعنى ذلك كله أنه عندما يصل المستهلك إلى التوازن ، فإن معدل الإحلال الحدى يساوى نسبة أسعار السلعتين . وبنفس الطريقة ، تؤكد المعادلة الأخيرة تعادل المنافع الحدية المشتقة من الجنيه الأخير المنفق على كل سلعة . وتتفق هذه العبارة مع ما انتهت إليه النظرية الكلاسيكية الحديثة فى التحليل العددى .

التغيرات فى الدخل النقدى

تؤدى التغيرات فى الدخل النقدى (مع بقاء الأسعار ثابتة) عادة إلى تغيرات مطابقة فى كميات السلع المشتراه . وتؤدى الزيادة فى الدخل النقدى إلى زيادة الاستهلاك من السلع ، وخاصة ما يعرف بالسلع العادية ، كذلك يؤدى انخفاض الدخل النقدى إلى انخفاض الاستهلاك . لذا يصبح تحليل آثار تغيرات الدخل على الاستهلاك فى غاية الأهمية . وحتى نقوم بمثل هذا التحليل ، سوف نفترض ثبات الأسعار المعطاه للسلع ومن ثم نتابع آثار تغيرات الدخل وحدها .

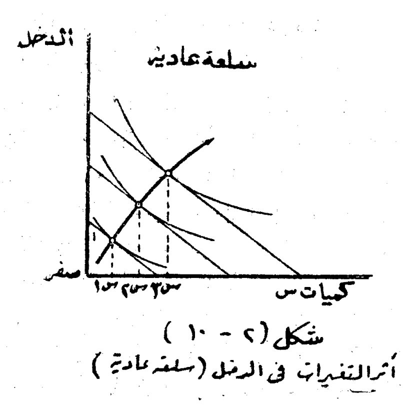
وسوف نركز انتباهنا من الآن فصاعدا على شراء المستهلك لسلعة واحدة فقط ولتكن السلعة (س) . وحتى هذه اللحظة كان يفترض أن المستهلك ينظر إلى منافع السلعتين (س) و (ص) ويوزع ميزانيته بين هاتين السلعتين . ولكن من الآن فصاعدا سيقيس الاحداثى الرأسى الدخل النقدى خلال فترة معينة من الزمن ، بينما نستمر فى استخدام الاحداثى الأفقى لقياس كميات السلعة (س) خلال نفس الفترة من الزمن . وسوف تبين منحنيات السواء المبادلات بين الكميات المختلفة من (س) والمبالغ النقدية . وحيث أنه يمكن استبدال النقود بالسلع الأخرى ، فإن منحنيات السواء ، فى هذه الحالة ، تبين التفضيل والسواء للمجموعات المختلفة من (س) والسلع الأخرى وبقيام خط الميزانية بأخذ نقطة على الاحداثى الرأسى والتى تقيس حجم الدخل بالجنيهات ، وذلك لأنه يفترض أن الميزانية والدخل متشابهان ، ونحصل على النقطة الواقعة على الأحداثى الأفقى بقسمة الدخل على سعر السلعة (س) . ويعطى الخط الموصل بين النقطتين خط الميزانية .

وعموماً ، كلما ارتفع دخل المستهلك كلما زادت مشترياته من السلعة .

وتعرف السلع التى تزيد الكميات المشتراه منها عندما يرتفع الدخل (بالسلع العادية) ، وتظهر فى الشكل (٢ — ١٠) حيث توجد ثلاثة خطوط للميزانية . وهى خطوط متوازية لتعنى أن سعر (س) يظل ثابتاً . كذلك فإن (سعر) الدخل النقدى والذى يساوى الوحدة يظل ثابتاً .

ويبين خط الميزانية المنخفض (الخط ١) أقل دخل . ويعنى انتقال خط الميزانية إلى أعلى بحاه اليمين دخول أعلى .

ويوجد بالشكل (٢ — ١٠) مجموعة واحدة من منحنيات السواء ... وتبقى هذه المنحنيات ثابتة لأن التفضيلات يفترض أنها لا تتغير .

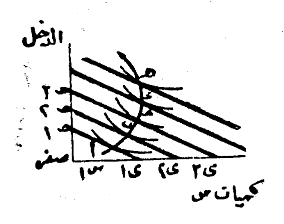


شكل (٢ - ١٠)
أثر التغيرات فى الدخل (سلعة عادية)

وتظهر بالشكل منحنيات السواء التى تمس خطوط الميزانية فقط . وعند الدخول المرتفعة تمس منحنيات السواء المرتفعة خطوط الميزانية . ويمكن رسم خط يمر بنقاط التماس المتتالية . وهذا الخط هو منحنى الدخل — والاستهلاك

ويشير إلى التغيرات فى استهلاك السلعة (س) المصاحبة لتغير الدخل : فعند خط الميزانية (١) يشترى المستهلك الكمية صفر س¹ من وحدات السلعة (س) ، وعند خط الميزانية (٢) يشترى صفر س٢ وحدة ... وهكذا.

ويبدأ منحنى الدخل — والاستهلاك (الموضح بالشكل ٢ — ١١) فى التحرك أولا تجاه الشمال الشرقى ثم يلتف ويستدير تجاه الشمال الغربى ، ليبين أنه بعد أن يصل دخل المستهلك إلى مستوى معين ، يبدأ المستهلك فى استهلاك كمية أقل من (س) وتسمى السلع التى تنطبق عليها هذه الحقيقة (السلع الرديئة) Inferior goods ومن الأمثلة الشائعة لمثل هـذه السلع ، العيش والفول والطعمية .



شكل (٢ - ١١)
آثار تغيرات الدخل (سلعه رديئه)

والسلعة الرديئة هى التى تشترى بكميات أقل عندما يرتفع الدخل ، وبكميات أكبر عندما ينخفض الدخل.

وبالرغم من ان هذا التعريف الفنى « للسلع الرديئة » معروف فى الكتابات

الاقتصادية ، فقد تكون دلالات ومفاهيم هذا التعبير مضللة ، وأحد هذه المفاهيم تشير إلى أنه من بين القائمة الطويلة للسلع التى تنتج فى المجتمع الحديث يوجد قليل جداً من السلع الرديئة ، بمعنى السلع الشعبية ، ويبدو فى أحد المفاهيم الأخرى أن السلع الرديئة هى سلع الطبقات الفقيرة ، فعندما يرتفع الدخل ، وينقضى عهد الفقر ينخفض استهلاك السلع الرديئة . والحقيقة أن الاتجاه إلى استهلاك كمية أقل من أحد السلع عند مستويات الدخول المرتفعة يعبر عن صورة من السلوكيات الشائعة أكثر مما هو متصور . فإذا دفعت البيئة الاجتماعية لممثلى السينما بهم لشراء سيارات الكاديلاك عندما تكون دخولهم مرتفعة وشراء السيارات الرولزرويس عندما ترتفع دخولهم إلى مستويات أعلى ، فإن السيارة الكاديلاك ستكون سلعة رديئة بالنسبة لهذه الطبقة من أفراد المجتمع ، وليس المقصود هنا أن السيارات الكاديلاك ، سيارات رديئة Inferior Automobils ولكنها ، كما لاحظنا ، سلعة رديئة لبعض المشترين ، وعموما فإنه عندما تعرف بعض السلع بنوعيات ورتب خاصة من السلع والخدمات ، حين يوجد بالسوق عدة نوعيات ورتب مختلفة ، فإن أى سلعة من هذه السلع المعينة قد تكون سلعة رديئة بالنسبة لأحد الأفراد أو لطبقة من الأفراد .

مرونة الدخل Income elasticity :

يمكن التعبير عن العلاقة بين تغيرات الدخل ، والتغيرات فى الاستهلاك بفكرة المرونة الداخلية للطلب ، وكما تشير المرونة السعرية للطلب إلى نسبة التغير النسبي فى الكميات المطلوبة إلى التغير النسبي فى السعر ، فإن المقصود بالمرونة الداخلية للطلب هو نسبة التغير النسبي فى الكميات المطلوبة إلى التغير النسبي فى الدخل ، أى أن :

$$\text{م}_{\text{د}} = \frac{\Delta \text{ك}}{\text{ك}} \div \frac{\Delta \text{ى}}{\text{ى}} = \frac{\text{ى}}{\text{ك}} \cdot \frac{\Delta \text{ك}}{\Delta \text{ى}}$$

حيث تشير م د إلى معامل المرونة الدخلية ، و (ى) إلى الدخل و (ك) و (ع) إلى الكميات المطلوبة والسعر على الترتيب . فإذا كانت م د أكبر من الواحد الصحيح فإن المرونة الدخلية تكون مرتفعة ، أما إذا كانت أقل من الواحد الصحيح تكون المرونة الدخلية منخفضة . وإشارة معامل المرونة تكون موجبة فى جميع الأحوال (باستثناء مرونة الطلب على السلع الرديئة) ذلك لأن الدخل والكمية المطلوبة يتغيران فى نفس الاتجاه .

منحنيات انجل Engel Curves

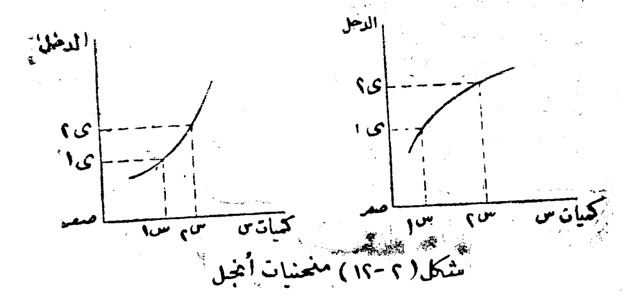
يمكن استخدام منحنى الدخل — والاستهلاك لاشتقاق منحنيات انجل لكل سلعة . ومنحنى انجل هو دالة تربط الكميات التوازنية المشتراه من سلعة بمستوى الدخل النقدى وسميت كذلك باسم العالم الإحصائى الألمانى كريستين لورانز ارنست انجل

Christiau Lorenz Ernst Engel

ومنحنيات انجل لها أهمية فى الدراسات التطبيقية للرفاهية الاقتصادية وفى تحليل انماط انفاق الأسرة .

وتظهر منحنيات انجل التى تربط بين استهلاك السلعة « س » والدخل فى الشكل (٢ — ١٢) وتجدر الإشارة أن هذه المنحنيات لم تبق مباشرة على أخذ منحنيات الدخل . والاستهلاك فى الشكل (٢ — ١١) ولكن عملية أشتقاق منحنى انجل من منحنى الدخل — والاستهلاك تسير على النحو التالى :

فعند نقطة التوازن الأصلية (أ) فى الشكل (٢ — ١١) يكون الدخل النقدى هو ١ . وعند هذا المستوى من الدخل تشترى الكمية (س ١) من السلعة (س) .



شكل (٢ - ١٢) منحنيات أنجل

وعندما يرتفع خط السعر إلى (ى ٢) يزيد دخل المستهلك وتزيد الكمية التى يشتريها من (س) . ويمكن تحديد نقطة الدخل — والاستهلاك على الرسم المبين بالجزء الأيسر من الشكل (٢ — ١٢) وتكون كل نقطة من الدخل والاستهلاك نقطة اخرى على منحنى انجل . وبتكرار هذه العملية على كل مستويات الدخل النقدى تتكون لدينا سلسلة من النقط على النحو المبين بالجزء الأيسر من الشكل (٢ — ١٢) . ويتكون منحنى انجل من الخط الذى يوصل بين هذه النقط .

ويظهر فى الشكل (٢ — ١٢) نوعين مختلفين من منحنيات انجل ، ففى الجزء الأيسر يميل منحنى انجل إلى أعلى بصورة أكثر انحداراً ويضمن ذلك أن التغيرات فى الدخل النقدى ليس لها تأثير ملموس على الاستهلاك . ويشير منحنى انجل من هذا النوع إلى إن السلعة محل الدراسة تشترى عند المستوى المنخفض من الدخل . ولكن الكمية المشتراه لا تزيد بنفس معدل زيادة الدخل ، ويمثل مثل هذا المنحنى نمط استهلاك الغذاء (بافتراض أننا نعالج الغذاء كسلعة واحدة) ومع ذلك قد يختلف منحنى انجل على شرائح اللحم كسلعة مستقلة .

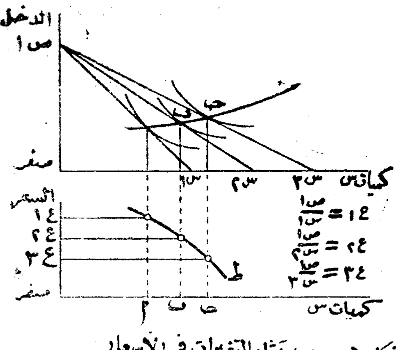
وخلاصة القول ، أن منحنى انجل (عندما يكون مقعراً من أعلى) يشير إلى سلعة مرونتها الدخلية منخفضة (ولكنها موجبة) .

ومن الناحية الأخرى ، نجد أن شرائح اللحم وغيرها من أنواع السلع الأخرى تظهر منحنيات انجل بصور أقرب إلى الجزء الأيمن من الشكل (٢ — ١٢) . ويشير المنحنى الهادى الإنحدار إلى أعلى ، إلى أن التغيير فى الكميات المشتراه يزيد بمعدل كبير مع تغير الدخل . ويشير مثل هذا المنحنى إلى مرونة دخلية الطلب مرتفعة نسبياً .

التغيرات فى الأسعار

يتكرر فى تحليل منحنى السواء ثلاثة متغيرات ، يمكن تثبيت أثنين منها ويسمح للثالث بالتغير . فعندما يتغير سعر السلعة ، يغير المستهلك من مشترواته بشرط إن يظل إذواقه ودخله النقدى ثابتة على حالها .

وتظهر آثار التغيرات فى السعر فى الجزء العلوى من الشكل (٢ — ١٣). حيث تظهر السلعة (س) بالأحداثى الأفقى والدخل النقدى (ص) بالأحداثى الرأسى ولنفرض ، أولا ، أن المستهلك فى حالة توازن عند النقطة (أ) . حيث يمس خط الميزانية (ص ١ س ١) منحنى السواء عند النقطة (أ) ولنفرض أن سعر السلعة (س) إنخفض . ويمثل ذلك الإنخفاض فى انتقال الجزء الأسفل من خط الميزانية إلى اليمين بنسبة تتناسب مع مقدار الإنخفاض فى السعر. ويمثل المقدار (صفر س ١) كمية السلعة (س) التى يمكن شرائها بالسعر الأصلى إذا أنفق المستهلك كل دخله فى شراء (س) ونتيجة لإنخفاض السعر يستطيع المستهلك أن يشترى كمية أكبر (بإنفاق كل ميزانيته) أى أنه يستطيع شراء الكمية (صفر س ٢) وإذا إنخفض السعر مرة أخرى يمكن للمستهلك أن يشترى المزيد ، وليكن صفر س ٣ . وكل إنخفاض فى السعر ينشأ خط ميزانية جديد (ص ١ س ٢ ، ص ١ س ٣ . . . الخ) . ويمس كل منها منحنى سواء (عند النقطة ب والنقطة حـ . . . الخ) . ويطلق على الخط الذى يصل بين نقطة التماس منحنى السعر - والاستهلاك . ويبين هذا المنحنى كيف يتغير الاستهلاك أو مشتريات (س) كلما تغير سعر السلعة (س) .



شكل (٢-١٣) آثار التغيرات فى الأسعار

ويبين منحنى السعر — والاستهلاك كميات السلعة (س) التى يشتريها المستهلك عند كل سعر . لذلك ، يحتوى المنحنى على المعلومات التى تساعدنا على استخراج منحنى طلب المستهلك . ويوضح الجزء الأسفل من الشكل (٢—١٣) كيف تتم هذه العملية . وفى هذا الجزء من الرسم يعرض الأحداثى الرأسى سعر السلعة . ، وتحسب الأسعار من الجزء العلوى بقسمة الدخل النقدى على أقصى كمية يمكن شرائها من السلعة (س) . ومن ثم نحصل على الثلاثة أسعار ع١ و ع٢ و ع٣ المبينة بالجزء الأسفل من الرسم . وتعطى الثلاثة أسعار والثلاثة كميات (أ) و (ب) و (حـ) ثلاثة نقاط على منحنى الطلب (ط) .

المرونة السعرية :

يظهر منحنى السعر — والاستهلاك فى الشكل (٢ — ١٣) بميل هادئ إلى أعلى تجاه اليمين . ويعنى ذلك أن طلب المستهلك على السلعة (س) غير مرن فإذا كان المنحنى أفقى (أى أن أذواق المستهلك تجعل التماس منحنيات السواء

يحدث على طول خط أفقى) تكون مرونة الطلب مساوية للوحدة . وإذا كان المنحنى منحدر إلى أسفل تجاه اليمين ، يكون منحنى الطلب على السلعة (س) مرن . ولأثبات ذلك ، نلاحظ أن المستهلك إذا كان عند النقطة ص ١ فإنه لا يشترى أية كمية من (س) ، ويحتفظ بنقوده لاستعمالات أخرى . وحتى يتيسر له شراء أى من السلعة (س) ، يتعين عليه الهبوط على خط ميزانيته ، ويعنى ذلك أنه يبادل (ص) بالسلعة (س) . ولكن (ص) تمثل النقود ومبادلة النقود بوحدات من السلعة ، تعنى بالعربية الفصحى ، أنفاق النقود فى شراء هذه السلعة . ولهذا فإن المسافة الرأسية من خط أفقى عند (ص ١) يبين كمية النقود التى تنفق على كمية معينة من (س) . وأخيراً فإن الإشارة إلى المبلغ النقدى الذى ينفق للحصول على سلعة ما عندما يتغير سعرها هى طريقة مبسطة لتعريف المرونة السعرية .

أثر الدخل وأثر الإحلال

لنفرض أن موطن أحد طلبة جامعة الزقازيق هو مدينة الأقصر . وعند إعداد ميزانيته للعام الدراسي يأخذ في الاعتبار أن يتضمن إنفاقه برنامج رحلات لزيارة أسرته ٧ مرات خلال العام . وحتى يختصر الوقت الضائع في السفر فهو يستخدم الطائرة في انتقاله بين القاهرة والأقصر . ويعتمد قراره في القيام بهذه الرحلات على حجم دخله النقدي المخصص في ميزانيته . وعلى الأشباع الذي يحصل عليه من هذه الزيارات إلى مسقط رأسه وعلى ما يتحمله من نفقات السفر في كل رحلة (ثمن تذكرة السفر بالطائرة) . ولنتصور أن ثمن تذكرة الطائرة إنخفض إنخفاضاً ملموساً ومن ثم بدأ الطالب في مراجعة ميزانيته . وجاءت خطته الجديدة ببرنامج يتضمن القيام بعشرة رحلات بدلا من سبعة . نظراً لأن إنخفاض ثمن التذكرة يمكن الطالب من شراء المزيد منها عند هذا السعر المنخفض .

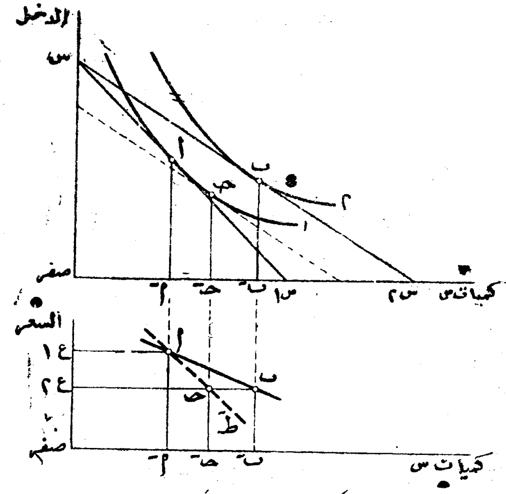
ولكن نظرة إلى أثر إنخفاض ثمن التذكرة تؤكد أنه يمكن تقسيم أثر إنخفاض السعر إلى جزئين. أحدهذه الآثار يسمى « أثر الدخل » Income effect وهو يمثل الزيادة في الدخل الحقيقي نتيجة لإنخفاض السعر . وهي ذاتها التي تدفع الطالب إلى التطلع إلى القيام برحلتين إضافيتين . ويمكن أن نتخيل صورة هذه الزيادة على النحو التالي : ما هو مقدار الدخل الذي يمكن للطالب إستقطاعه من ميزانيته (على ضوء السعر المنخفض لتذاكر السفر) السنوية ليعود إلى نفس مستوى المنفعة التي كان يحصل عليها من قبل عندما كان يعد خطة رحلاته بالسعر القديم المرتفع ؟ ولنفرض إن هذا الإنخفاض التخيلي في الدخل مقداره ١٠٠ ج يكون السؤال : على ضوء ميزانية جديدة تقل بمبلغ ١٠٠ جنيه عما كانت عليه من قبل ، وبالأسعار الجديدة المنخفضة ، ما هو عدد الرحلات التي يقوم بها الطالب لزيارة أسرته ؟ . ولنفرض أن الإجابة هي ٨ رحلات ، وهي تختلف عن

السبع رحلات التي كان يخطط لها عند السعر المرتفع . لذلك فإن هذه الرحلة الإضافية بالسعر المنخفض وفي ضوء إنخفاض افتراضي في الميزانية قدره ١٠٠ ج هي ما يعبر عنه بـ « أثر الإحلال » The Substitution effect .

لذلك فإن الأثر الكلي لإنخفاض السعر ، يتكون من شقين : أثر الدخل وأثر الإحلال . ويمثل أثر الدخل الجزء من الزيادة في الكمية المشتراه التي تعزى إلى الزيادة في المنفعة . وأثر الإحلال الجزء الآخر من الزيادة التي ترجع إلى إنخفاض السعر فحسب ، هذا الجزء من الزيادة مستقلا عن الزيادة في المنفعة .

ويوضح الشكل (٢ — ١٤) الأثر الإحلالي ، والأثر الدخلي لإنخفاض السعر . ولنفرض أن المستهلك في حالة توازن عند النقطة (أ) ،حيث يمس منحنى السواء (١) خط الميزانية (ص س ١) . ويحقق المستهلك مستوى معين من المنفعة أو الأشباع عند النقطة (أ) على منحنى السواء (١) . ويقترن تعبير الدخل الحقيقي بذات المعنى . فإذا إنخفضت السلعة (س) يصبح خط الميزانية الجديد هو (ص س٢) وينتقل المستهلك بذلك إلى توازن جديد عند النقطة (ب) على منحنى السواء (٢) .

ويدعو إنخفاض السعر ، المستهلك إلى شراء المزيد من السلعة (س) . وتمثل اَ بَ الكمية الإضافية على الأحداثي الأفقي ، والتي تماثل المسافة الأفقية بين النقطتين (ا) ، (بَ) . والمسافة اَ بَ هي « الأثر الكلي » لتغير السعر ، و اَ حَ الأثر الإحلالي ، حَ بَ الأثر الدخلي .



الشكل (٢ - ١٤)
أثر الدخل وأثر الإحلال (حالة انخفاض السعر)

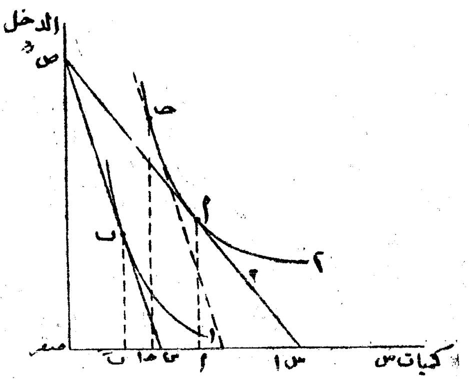
ويتم إيجاد أثر الإحلال بالخط المتقطع الموازى لخط الميزانية ص س ٢ . ويعكس الخط المتقطع السعر الجديد المنخفض للسلعة (س) . وهو عبارة عن إنتقال وهمى (تخيلى) لخط الميزانية (ص س ٢) أسفل تجاه اليسار . لذلك فإن هذا الخط المتقطع يمثل تخفيض وهمى فى الدخل بمقدار يضاهى الزيادة فى الدخل الحقيقى المترتبة على إنخفاض السعر ، أن هذا التخفيض الوهمى يلغى أثر الدخل الناشىء عن إنخفاض السعر . ويمس الخط المتقطع منحنى السواء (١) عند النقطة (حـ) . وطبقاً لذلك تبين النقطة (حـ) على الخط المتقطع مقدار الزيادة التى يشتريها المستهلك من السلعة (س) مستقلة عن أية زيادة فى دخله الحقيقى .

لذلك فإن أثر الدخل يمثل الجزء الآخر من الأثر الكلى . فإذا توهمنا

أن الخط المنقطع انتقل إلى اليمين، وأصبح مطابقاً لخط الميزانية الجديد (ص س٢) فإن المسافة الرأسية التي تفصل بين الخط المنقطع وخط الميزانية الجديد تقيس الزيادة في الدخل الحقيقي . وهي ذاتها تسبب الزيادة في الكمية المشتراه (حَ بَ) من السلعة .

والجزء السفلي من الشكل (٢ — ١٤) هو تحويل للجزء العلوي من الشكل إلى صورة تعبر عن منحنى الطلب حيث تظهر الكمية المطلوبة على الأحداثي الأفقي والسعر على الأحداثي الرأسي . وتعبر (ع ١) عن السعر الأصلي و (ع ٢) عن السعر الجديد المنخفض . ويمر منحنى الطلب بالنقط (أ) و (ب) والتي تناظر الكميات (صفر أ) و (صفر ب) . ويمر منحنى الطلب المنقطع خلال النقط (أ) و (ب) ويبين هذا الخط المنقطع طلب معوض أي خط يفترض ثبات الدخل الحقيقي . لذلك فإن المنحنى المنقطع يعرض أثر الإحلال فقط .

ويوضح الشكل (٢ — ١٥) أثر الإحلال وأثر الدخل في حالة ارتفاع



الشكل (٢-١٥) أثر الدخل وأثر الإحلال (حالة ارتفاع السعر)

السعر . وتمثل النقطة (أ) نقطة التوازن الأصلية على منحنى السواء (٢) حيث يشترى المستهلك الكمية « صفراً » من السلعة (س) . وعندما يرتفع سعر السلعة (س) (كما يتضح من إنتقال خط الميزانية من (ص س ١) إلى ص س ٢) ينتقل المستهلك إلى نقطة توازن جديدة (ب) على منحنى السواء (١) . وعند هذه النقطة يشترى المستهلك الكمية (صفر ب) من السلعة (س) . ويكون الأثر الكلى لتغير السعر هو إنخفاض الكمية المطلوبة من (صفر أ) إلى صفر ب) أو الانتقال من النقطة (أ) إلى النقطه (ب) . وبعبارة أخرى، يساوى الأثر الكلى صفر أ — صفر ب = أ ب . ويعرف بأنه أثر كلى سالب لأن الكمية المطلوبة تنخفض بـ (أ ب) وحده .

ويلاحظ أنه عندما يرتفع سعر السلعة (س) ، يعانى المستهلك من إنخفاض فى الدخل الحقيقى ، يشير إليه الإنتقال من منحنى السواء (٢) إلى منحنى السواء (١) . ولنفرض أنه تصادف مع ارتفاع السعر أن حصل المستهلك على (مقدار إضافى) من الدخل الحقيقى . أى أنه يحصل على دخل يعوضه عن الأثر التضخمى فى زيادة سعر السلعة (س) بالقدر الذى يمكنه من البقاء على منحنى السواء (٢) ليحافظ على مستوى أشباعه فى ظل مستوى السعر الجديد .

ويعبر ذلك بيانيا فى الشكل (٢ — ١٥) بخط الميزانية الوهمى المتقطع الذى يمس منحنى السواء الأصلى ولكن ميله ينطبق مع نسبة السعر الجديد . ويمس الخط المتقطع منحنى السواء (٢) عند النقطة (حـ) ولكنه موازى لخط الميزانية الجديد (ص س ٢) ومن ثم يعكس نسبة السعر الجديد .

ويظهر أثر الإحلال فى صورة الانتقال من نقطة التوازن الأصلية (أ) إلى نقطة التوازن الوهمية (حـ) ، والتى يقع كلاهما على منحنى السواء الأصلى (٢) ويساوى أثر الإحلال إنخفاض الكمية المطلوبة من (صفر أ) إلى (صفر حـ) أى بمقدار أ حـ وحدة .

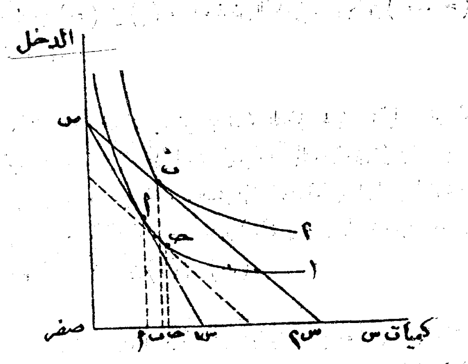
والمعروف أن أثر الإحلال سالب ، ذلك لأن الإنخفاض فى السعر يصاحبه دائماً زيادة فى الكمية ، وأرتفاع السعر يصاحبه إنخفاض فى الكمية . أى أنه أما التغير فى السعر أو التغير فى الكمية له إشارة سالبة . ولهذا فإن النسبة $\frac{\triangle ك}{\triangle ع}$ تكون إشارتها سالبة باستمرار . وعادة يكون أثر الدخل موجب ، فالزيادة فى الدخل الحقيقى تؤدى إلى شراء كمية أكبر . ولكن نظرة ثانية إلى الشكل (٢ — ١٤) تبين لنا أن موضع النقطه (ب) يعتمد على شكل منحنى السواء(٢) فبقليل من التخيل يستطيع القارىء أن يرى أن أشكال أخرى لمنحنى السواء(٢) يمكن أن تنشأ نقطة (ب) عند مواضع أخرى .

ويمكن التمييز بين أربعة مجموعات مختلفة من آثار الإحلال والدخل :

١ — الآثار العادية وهى التى ذكرناها بالفعل : النقطة (ب) تقع على يمين النقطة (حـ) . ويعمل أثر الإحلال السالب وأثر الدخل الموجب فى نفس الاتجاه لزيادة الكمية المشتراه من (س) عند إنخفاض سعرها ،

٢ — قد يكون أثر الدخل مساوياً للصفر . وفى هذه الحالة تقع النقطة (ب) رأسياً فوق النقطة (حـ) . ويكون منحنى السواء متوازيان ولهما نفس الميل عند النقطتين وفى هذه الحالة فإن أثر الإحلال هو وحده الذى يؤدى إلى تغير الكمية المشتراه من (س) .

٣ — قد يكون الأثر الدخلى سالب ولكن قوته أقل من قوة أثر الإحلال . ويكون شكل منحنى السواء (٢) فى هذه الحالة ، بالصورة التى تضع النقطة(ب) بين (أ) و (حـ) . ولا زال الأثر الكلى يعبر عن زيادة فى الكمية المشتراه من السلعة (س) نتيجة لإنخفاض السعر . والسلع التى لهما أثر دخلى سالب هى سلع



شكل (٢-١٦) آثار الدخل والإحلال لسلعة رديئة

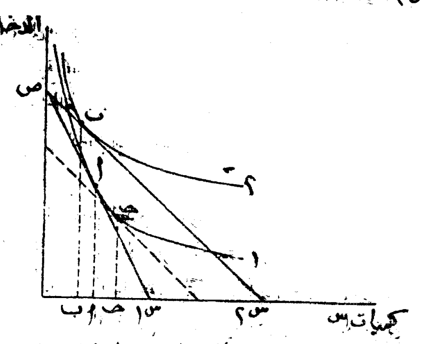
رديئة Inferior Joods ويصور الشكل (٢ — ١٦) آثار الدخل والإحلال لسلعة رديئة ، ويمثل الخط (ص س ١) خط الميزانية الأصلى ، وبإنخفاض سعر السلعة (س) ينقل خط الميزانية إلى (ص س ٢) ومن ثم تنقل نقطة التوازن (أ) على منحنى السواء (١) إلى النقطة (ب) على منحنى السواء (٢). ويلاحظ أن الكمية المطلوبة من (س) تزيد من (صفر أ) إلى (صفر ب) . وبالرغم من أن هذه الحالة تتضمن سلعة رديئة ، إلا أنها لا تخالف قانون الطلب فأثر الإحلال يفوق الأثر الدخلى السالب .

ويمكننا رسم خط ميزانيه وهمى (الخط المنقطع) ليبين المستوى القديم من الدخل الحقيقى ونسبة الأسعار الجديدة . ويمثل الإنتقال من (أ) إلى (حـ) (أو الزيادة فى الكمية المطلوبة من صفر أ إلى صفر حـ) أثر الإحلال .وهو أثر سالب قوى . لأن الإنخفاض فى السعر يؤدى إلى زيادة ملموسة فى الكمية المطلوبة بفرض ثبات الدخـــل الحقيقى . كذلك فإن الأثر الدخلى سالب كما يشير إليه

التحرك من (ح) إلى (ب) أو بإنخفاض الكمية المطلوبة من (صفر ح) إلى (صفر ب).

وتمثل هذه الحالة التى يعوض عن الأثر الدخلى فيها جزئياً الأثر الدخلى السالب ولكن الأثر الدخلى السالب ليس كافياً بالدرجة التى تؤدى إلى تغير الكمية المطلوبة مباشرة مع تغير السعر . لذلك فإن قانون الطلب ما زال ينطبق ، ولكن الطلب ضعيف المرونة خلال هذا المدى (والتى يشير إليها حدة ميل منحنى السعر والاستهلاك إلى أعلى من (أ) إلى (ب).

٤ — وقد يكون الأثر الدخلى سالبا ولكنه يكون فى نفس الوقت كبيراً بدرجة تتجاوز أثر الإحلال . ولذلك تقع النقطة (ب) على يسار النقطة (أ) . وتعرف هذه النتيجة بأثر جفن Giffen effect . ويسمى أثر جفن ، فى بعض الأحيان ، لغز جفن Giffen Paradox . ويعنى أن السعر المنخفض للسلعة يؤدى إلى شراء كمية أقل بدلا من شراء كمية أكبر . وتعرف مثل هذه السلعة بـ (سلعة جفن) Giffen good .



شكل (٢-١٣) أثر الدخل وأثر الإحلال لسلعة جفن

ولا ينطبق قانون الطلب على حالة سلعة جفن كما هو واضح من الشكل (٢ — ١٧) ، حيث نقطة التوازن الأصلية (أ) عند تماس خط الميزانية (ص س ١) مع منحنى السواء (١) ، ثم ينخفض سعر السلعة (س) بالمقدار المبين بميل خط الميزانية (ص س ٢) وتنتقل نقطة التوازن الجديد إلى (ب) على منحنى السواء (٢) .

ولنتصور وجود خط الميزانية الوهمى المنقطع الذى يبين مستوى الدخل الحقيقى القديم ونسبة السعر الجديد . ويمثل أثر الإحلال الإنتقال من (أ) إلى (حـ) على طول منحنى السواء (١) . أو بالزيادة فى الكمية المطلوبة من (صفر أ) إلى (صفر حـ) .

ويظهر أثر الدخل فى صورة الإنتقال من (أ) على منحنى السواء (١) إلى (ب) على منحنى السواء (٢) ، أو بالإنخفاض فى الكمية المطلوبة من (صفر حـ) إلى (صفر ب) وبإضافة أثر الإحلال السلبى إلى أثر الدخل نجـــد أن الأثر الكلى لإنخفاض السعر هو إنخفاض الكمية المطلوبة من (صفر أ إلى (صفر ب) . ولمثل هذه السلعة لا يتحقق قانون الطلب .

ولكن هل يوجد فى الحقيقة شىء مثل سلعة جفن ؟ ربما يوجد فى بعض الظروف عندما يكون المستهلكين فى حالة من الفقر الشديد تجعلهم يعتمدون فى معاشهم على الخبز بصفة أساسية . فإذا حدث إنخفاض كبير فى أسعار الخبز سيتوفر جزء من الدخل يمكن توجيهه إلى شراء سلع غذائية أخرى مثل اللحم ومن ثم تنخفض مشتريات المستهلك من الخبز :

وبالرغم من أن سلع جفن هى سلع رديئة ، فليست كل السلع الرديئة سلع جفن ومنحنى الطلب لسلعة جفن ميله موجب ، حيث يشترى القليل عند السعر المنخفض

والكثير عند السعر المرتفع . ومبدأ فكرة سلعة جفن هو الأثر التناقضى الظاهرى للتغير فى السعر . وعلى عكس ذلك فإن السلعة الرديئة التى ليست سلعة جفن ، ميل منحنى الطلب عليها سالب . ومغزى فكرة السلعة الرديئة من غير سلع جفن هو أثر التغير فى الدخل . فالزيادة فى الدخل تنقل منحنى الطلب إلى اليسار ، ومن ثم تنخفض الكمية المشتراه عند ثبات السعر . ولكن عندما يكون هناك إنخفاض فى السعر فقط تزيد الكمية المشتراه ، وتتجاوز قوة أثر الإحلال قوة الأثر الدخلى السالب .

ويمكن تلخيص المجموعات المختلفة من آثار الدخل والإحلال فى الجدول التالى :

	١	٢	٣	٤
أثر الإحلال	سالب	سالب	سالب	سالب
أثر الدخل	موجب	صفر	سالب ولكن أقل من أثر الإحلال	سالب ولكن أكبر من أثر الإحلال
الأثر الكلى	زيادة	زيادة	زيادة	نقص
نوع السلعة	عادية	عادية	رديئة	جفن

أهمية الأثر الدخلى :

أن الأثر الدخلى للتغيرات فى الأسعار التى يدفعها المستهلكين تكون صغيرة فى العادة بحيث يمكن إهمالها فى معظم الأحوال . فإذا انخفض سعر زجاجة الكوكا كولا ٥ مليمات ، فإن المستهلك لن يقفز من الفرح ويقوم بإعادة النظر فى ميزانيته كلها . وهو نفس القول بأن التغيرات فى السعر لها أثر ضئيل غير ملموس على المنفعة الحدية لدخل المستهلك . ومنحنيات السواء العادية والتى تشبه تلك المنحنيات التى استخدمناها فى هذا الفصل ، ليست استثناءاً من ذلك إذ تتضمن بعض المبالغة وتبين كما قال هيكس بنفسه ، انفاق المستهلك جزء كبير جداً من دخله للحصول على سلعة واحدة (س) ويقاس مقدار الانفاق بالمسافة أسفل وإلى يسار نهاية خط الميزانية ، وقد تعمدنا أن نجعل هذا المقدار كبيراً فى الأشكال البيانية لا لسبب إلا أن نجعلها واضحة . ولنفس السبب بينا فى الأشكال تغيرات كبيرة فى السعر . وهاتين المبالغتين فى الشكل جعلت أثر الدخل يظهر أكبر أهمية بكثير عن الحقيقة .

الفصل الثالث

تطبيقات لتحليل منحنيات السواء

إن منحنيات السواء وإن كانت لا تستخدم الأرقام فى قياسها إلا أنها أداة وأسلوب فنى فى التحليل يمكن الاستعانة به فى توضيح الرؤية وتبسيط عرض المشاكل الهامة ذات الطبيعة العملية وسوف نولى فى هذا الفصل العناية باستخدام منحنيات السواء فى تحليل بعض المشاكل التى ترتبط بفرض الضرائب وصرف الإعانات وتحديد عرض الخدمات التى يقدمها القطاع العائلى ونظرية الأرقام القياسية.

١ — ضرائب الدخل والضرائب على مبيعات سلع معينة بذاتها :

لننظر الان الى ماتصحبه ضرائب الدخل من آثار على الرفاهية بالمقارنة بتلك المترتبة على فرض ضرائب مبيعات أو رسوم على سلع معينة. فعندما يفكر المشرع فى مسألة الاختيار بين فرض ضرائب إضافية على الدخل وبين فرضها على السلع يتعين عليه أخذ العديد من الأشياء فى الاعتبار — سهولة الإدارة، الآثار على توزيع الدخل، آثارها على بعض الصناعات القائمة، على الحوافز، على استقرار الاقتصاد القومى. وغيرها من المسائل التى يتعين عليه دراستها والتفكير فيها قبل أن يصل رأى محدد. وبالإضافة إلى ذلك قد يتساءل المشرع: أى من هذين النوعين من الضرائب يفرض عبئاً أكبر، ضريبة دخل مرتفعة أم ضريبة على مبيعات سلعة معينة ؟ أى منها أكثر عبئاً ؟.

ويمكن لأحد الموالين دافعي الضريبة أن يجيب على هذا السؤال ، لنعتبره مثلا لمجموعة المولين فى ذات المستوى من الدخل . وحتى نبسط الموضوع،دعنا نفترض أن مقدار ضريبة الدخل الإضافية معبراً عنها بعدد الجنيهات تعادل مقدار الضريبة الإضافية على مبيعات سلعة مايستهلكها المول . ولنفرض أيضاً، أن المول لن يتوقف عن شراء السلعة بسبب ارتفاع سعرها نتيجة لفرض الضريبة . ومن الممكن أن يكون مقدار الضريبة ، فى حدود مبلغ ١٠٠ جنيه ، وهنا نعود إلى السؤال مرة أخرى أى من الحالتين أسوأ ، هل هى حالة سداد مبلغ ١٠٠ جنيه فى السنة زيادة فى ضريبة الدخل أم ١٠٠ جنيه زيادة فى الضرائب غير المباشرة على سلعة ما ؟ أم يستوى الأمر؟

ويوضح الشكل (٣ — ١) حل المشكلة ... حيث يحصل المول على دخل قدره (صفر ص ١) ، ويستهلك السلعة (س) وتشير المسافة (صفر س١) إلى السعر المبدئى للسلعة (س) (بطريقة غير مباشرة ، فإذا قام المول بانفاق كل دخله على السلعة (س) فإنه يستطيع شراء الكمية (صفر س١) منها) ، لذلك فإن خط الميزانية الذى نبدأ به هو (ص١ س١) ولنفرض أن المستهلك فى حالة توازن عند النقطة (أ) على منحنى السواء (١) ، فإن فرض ضريبة على السلعة (س) سيرفع من سعرها ، وينتج عن ذلك انتقال خط الميزانية إلى خط

شكل (٣ - ١) ضرائب الرسوم السلعية بالمقارنة بضريبة الدخل

جديد (ص ١ س ٢) . ويوضح الشكل (٣ — ١) أن سعر السلعة (س) قد ارتفع بما يزيد على الضعف (صفر س ٢ أصغر من نصف صفر س ١) . وهو أمر لا يعقل بطبيعة الحال فى الحياة العملية أن يكون لفرض الضريبة هذا الأثر القوى ، ولكنها مبالغة قصدنا بها أن يكون الشكل البيانى أكثر إيضاحاً . مع علمنا بأن النتيجة لن تتأثر بمثل هذه المبالغة . ويصل المستهلك إلى نقطة توازن جديدة (ب) عند تماس خط الميزانية (ص ١ س ٢) مع منحنى السواء (٢) . وفى وضعه الجديد يشترى كمية أقل من (س) لأن (ب) تقع على يسار (أ) والخطوة التالية نود فيها قياس مقدار الضريبة الغير مباشرة ، فعند شراء كمية من (س) عند نقطة التوازن (ب) ينفق المستهلك كمية من النقود تساوى (د ب) فإذا توقف عن شراء السلعة (س) كلية فإنه يكون عند النقطة (د) (= ص١) أما إذا اشترى نفس الكمية التى كان يشتريها من السلعة (س) بالسعر المنخفض القديم ، فإنه ينفق (د هـ) ، ولهذا فإن (د هـ) هى مقدار الضريبة . (ولنعطى مثلا حسابيا نوضح هذه النقطة . لنفرض أن مستهلك كان يشترى ١٠ وحدات من سلعة ما بسعر ٤ جنيهات للوحدة والآن يشترى ٨ وحدات بسعر ٦ جنيهات للوحدة . لذلك فانه ينفق الآن ٤٨ جنيه ، ولكن لو كان قد اشترى ٨ وحدات بسعر ٤ جنيهات لكان إنفاقه ٣٢ جنيه ومن ثم فإن ١٦ جنيها من إجمالى ٤٨ جنيه ينفقها حالياً بالسعر الجديد تساوى مقدار الضريبة غير المباشرة) .

والآن ننتقل إلى توضيح أثر فرض ضريبة على الدخل بنفس المقدار (دب) لنبدأ من (ص ١) إلى أسفل لنقيس المسافة (ص ١ ص ٢) = (د ب) أى أن دخل المستهلك بعد استقطاع ضريبة الدخل هو (ص ٢ صفر) . ثم نرسم خط الميزانية الجديد (ص ٢ س ٢) موازى لخط الميزانية الأول (ص ١ س ١) ليمثل إنخفاض الدخل ويمس منحنى السواء (٣) . (ص ٢ س ٣) عند النقطة (جـ) . ولما كان منحنى السواء (٢) يقع أسفل المنحنى (٣) ، فاننا نستخلص

من ذلك أن ضريبة المبيعات على السلعة (س) وقعها أكثر عبئاً من ضريبة على الدخل بنفس المقدار.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن تحليل منحنى السواء يعطى هذه النتيجة بصرف النظر عن شكل منحنيات السواء، ولكن الشرط الوحيد هو أن تكون هذه المنحنيات محدبة تجاه نقطة الأصل. ويلاحظ من التحليل أن ضريبة المبيعات تضع المستهلك على منحنى للسواء أدنى من منحنى السواء الذى يصل إليه عند فرض ضريبة على الدخل مساوية فى المقدار، غير أن التحليل لا يبين لنا إلى أى حد يعتبر العبء الشخصى لضريبة المبيعات (أ) سوأ من عبء ضريبة الدخل وأقصد بهذا أن تحليل السواء لا يقيس لنا مقدار هذا العبء ودرجة الاختلاف.

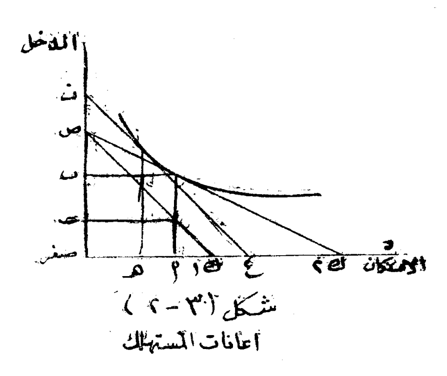
ولكن المضمون العام الذى يمكن استخلاصه من هذه النتيجة أن ضريبة المبيعات (أ) سوأ لأنها تشوه ميزانية المستهلك، فضريبة المبيعات، لكونها ترفع سعر السلعة فإنها بذلك تفرض ضغوطاً قوية على المستهلك تجبره على خفض إنفاقه على ذات السلعة الخاضعة للضريبة: ولكن على عكس ذلك فإن ضريبة الدخل تخفض القوة الشرائية للمستهلك عامة. ومن ثم يستطيع المستهلك فى هذه الحالة أن يستقطع مقدار الضريبة من إنفاقه على تلك السلع ذات الأهمية الأقل بالنسبة له ولذا فإن ضريبة الدخل تترك للمستهلك الحرية فى إعادة توزيع إنفاقه بالطريقة التى يجدها أفضل لتعظيم أشباعه.

٢ — تقديم الإعانات للمستهلك:

من التطبيقات الأخرى لتحليل منحنيات السواء بفرض آثار الإعانات على الأفراد محدودى الدخل. ولنفرض أن الحكومة توفر بعض السلع لمحدودى

الدخل بأسعار منخفضة . وتقديم مثل هـذه الإعانات هو من الأنشطة العادية الحكومة فى المجتمعات التى يتولاجد فيها أعداد كبيرة من البشر ترتبوا دخولهم عن تغطية الاحتياجات الضرورية من السلع الأساسية . وسوف نعطى مثالا لذلك بالإسكان الشعبي .. لنفرض أن المستأجر فى المساكن الشعبية يدفع مبلغ يعادل نصف مبلغ الإيجار الذى كان يتعين عليه سداده عادة لو أنه أقام بمساكن أخرى مشابهة . . ويمثل النصف الآخر من الإيجار إعانة تتحملها الدولة عن الساكن (وهذا افتراض واقعى تماماً). ولـكن هل الاستفادة التى تعود على المستهلك من هذا المشروع تعادل تـكلفة الإعانة ؟.

ويوضح الشكل (٣ — ٢) الإجابة على هذا السؤال ، حيث يبين وضع أحد المستهلكين (وأسرته) ، ويظهر الدخل على الإحداثى الرأسى والإسكان (مقاس بعدد من الأمتار المربعة فى السطح) على الإحداثى الأفقى ، ولنفرض أن دخل المستهلك هو « صفر ص » وإذا قام بتأجير وحدات سكنية غير معانة



شكل (٣ - ٢)
اعانات المستهلك

وأنفق كل دخله عليها فإنه يستطيع إشغال مساحة قدرها « صفر ك١ » متر مربع

ولهذا فإن « ص ك ١ » هو خط الميزانية بدون إعانة ، وعند تقديم الإعانة ينخفض الإيجار إلى النصف ، ولهذا فإن خط الميزانية ينتقل إلى « ص ك ٢ » وهو نفس التحرك الذى كان يحدث لخط الميزانية فى حالة انخفاض السعر بمقدار النصف ، أى أن (صفر ك ٢) تساوى ضعف (صفر ك ١) ويصل المستهلك إلى التوازن عندما يستأجر المساحة (صفر ا) من الإسكان ، وتتحدد نقطة التوازن هذه بتماس منحنى السواء مع خط الميزانية المدعم (فى ظل تقديم الإعانات) وتمثل المسافة (ب ح) مقدار الإعانة ويمكن تفسير ذلك على النحو التالى :

عند التوازن ينفق المستهلك (ص ب) على الإسكان ، فإذا قام بتأجير نفس المساحة بدون دعم كان يتعين عليه دفع مبلغ (ص ح) ، ولهذا فإن تكلفة الإعانة على الحكومة هى (ب ح) ، وهى تمثل المسافة الرأسية بين خطى الميزانية ، ولكن الإعانة لا تمثل بالنسبة للمستهلك مبلغ نقدى بل مساحة أكبر من الإسكان ، فما هو المقابل (المعادل) النقدى للإعانة بالنسبة للمستهلك ؟ أنها تظهر فى الشكل (٣ — ٢) بالمساحة فى (ص) (من الجنيهات) ، وينتقل خط الميزانية الغير مدعم إلى اليمين حتى يمس منحنى السواء وهذا هو الخط (ف ع) الذى يعنى الزيادة فى الدخل النقدى التى تجعل المستهلك فى نفس المستوى الذى يحققه فى حالة وجود الدعم ، والواضح من الشكل أن (ف ص) أقل من (ب ج) والحقيقة أنها تكون دائماً كذلك ، مهما كان مقدار الإعانة ، ومهما يكن من أمر تفضيلات المستهلك ، طالما بقيت منحنيات السواء محدبة ومستمرة (وهذا هو الشرط الوحيد) ، لذلك فإن تكلفة تقديم الإعانات للمستهلك تكون ، على الدوام ، أكبر من المعادل النقدى المكاسب الشخصية للمستهلكين ، وهنا وهنا نحن نعرض حالة خاصة من المبدأ العام الذى يقرر ، أنه بصرف النظر عن آداب المعاشرة (الإتيكيت) والشعور والوجدان ، يمكننا أن نجعل أحد الأفراد أكثر سعادة إذا أعطيناه مبلغ نقدى بدلا من إعطاءه سلعة ما ، حتى إذا كانت هذه سلعة يرغبها .

ولكن صحة هذا المبدأ وسريانه لاتحجب أو تصادر على أهمية مشروعات الإسكان العامة (الشعبية)، ولذا يتعين الحكم عليها باستخدام معايير تتعدى معيار الاستفادة الشخصية للمستأجر، فنظرة أخرى إلى الشكل (٣ — ٢) توضح لنا إنه في ظل الدعم سيختار المستهلك المساحة (صفر ا) ولكن عندما يحصل على دعم في صورة مقابل نقدي، فإنه سيختار مساحة قدرها (صفر ﻫ) من الإسكان وهي مساحة أقل، وبناء على ذلك فان الإعانة تحمل المستهلك على استئجار مساحة أكبر من الإسكان. وهــذه، كذلك، أحد برنامج الإسكان الشعبي.

وهناك المزيد الذي يتعين إضافته في هـذا الخصوص، فنظرية المتسهلك تحتوي ضمنا على مبدأ استقلال المستهلك، بمعنى أن كل مستهلك أقدر من غيره في تقدير صالحه ومافيه صلاحه، وهو وحده القادر على تعظيم منفعته، وتعظيم المنفعة الشخصية هو المعيار الوحيد لاتخاذ القرار، وغالباً ماتصل تطبيقات نظرية المستهلك إلى نتائج تتعارض مع التقديرات والسياسات القومية المدروسة للمجتمع والتي تبنى على معايير أخرى، وبجانب مشروعات الإسكان الشعبي هناك أمثلة مشابهة مثل شرط تقديم وجبات غذائية للأطفال بالمدارس، والذين يعيشون بالقرب من محدودي الدخل، فلو اتفقنا أن شيئاً ما يجب عمله لرعاية مثل هؤلاء الأطفال فمن ذا الذي يقف متصديا ليثبت أن وضع هؤلاء الأطفال يكون أفضل لو دفعنا لهم بدل نقدي محل وجبات الطعام؟ لاشك أن معيار استقلال المستهلك هام ولكن الحكومات في العصر الحديث تستخدم معايير أخرى في تنفيذ سياستها الاجتماعية القومية.

المعروض من خدمات القطاع العائلى

أن سلوك المستهلكين ، أى الأسر كمشترين للسلع والخدمات كان هو موضوع هذا الفصل حتى الآن ، ولكننا سنركز من الآن فصاعدا على سلوك أسر المجتمع بصفتهم بائعين للخدمات إلى منشآت الأعمال ، والغرض من التحليل هو الكشف عن الأسس التى تحدد أشكال منحنيات عرض العمل ، وأداة التحليل الأساسية التى نستخدمها هى مجموعة أخرى من منحنيات السواء .

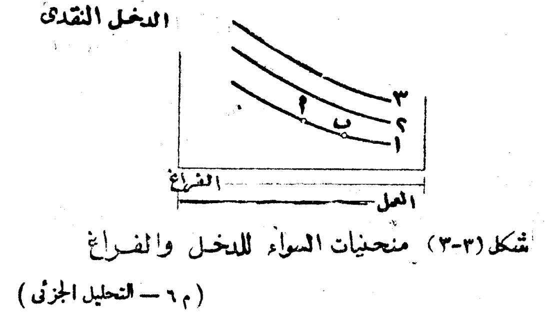
ولننظر إلى موقف الأسر تجاه دخولهم ، وعموما فإنه كلما زاد الدخل كلما كان أفضل . وعموما كذلك ، أن المزيد من الدخل يتحقق ، فى ضوء ظروف معينة ، ببذل المزيد من العمل (أى بزيادة مبيعات الأسرة لمزيد من الخدمات فى فترة معينة من الزمن) ، والمزيد من العمل يعنى التضحية بجزء من وقت الفراغ ، وهو شىء مرغوب فيه كذلك ، والزيادة فى المنفعة الناشئة عن المزيد من الدخل سيوازنها ، بالضرورة ، نقص المنفعة نتيجة لنقص وقت الفراغ (وقت الراحة) .

ولنفترض الآن أن أعضاء أسرة من الأسر تستطيع أن تغير تجربة تامة حجم دخلها المشترك بتغيير عدد الساعات الأسبوعية التى يعملونها وقد يكون هذا الفرض غير واقعى ، لأن الملايين من الأفراد يوظفون لعدد ثابت من الساعات وليس لهم أى سيطرة على التحكم فى إضافة المزيد من الساعات التى يعملونها فوق الساعات المحددة ، ولكن لاتزال هناك فرصة أمام العديد من الأفراد للاختيار بين قبول العمل ساعات إضافية من عدمه ، أو القيام بأجازة بدون مرتب ، كذلك يستطيعون إساءة استخدام حقهم فى الأجازات المرضية المسموح بها وغيرها من التصرفات التى تخضع لاختيارهم وسلوكهم الشخصى ، وبجانب ذلك هناك كثير من الأفراد يعملون فى وظيفتين ، ولما كانت الوحدة هنا هى الأسرة وليس الفرد (بالرغم من أن بعض الأسر تتكون من فرد واحد) ، يصبح من

الواضح أن الأسرة المكونة الى شخصين أو أكثر تتمتع بقدر من المرونة فى تقدير عدد الساعات التى يعملونها أسبوعياً ، هل تعمل الزوجة ؟ وإلى أى حد. جزء من الوقت أم كل الوقت ؟ هل يلتحق الزوج بوظيفة أخرى فى المساء أو فى عطلة نهاية الأسبوع ؟ فهناك أفكار تجول بخاطر أعضاء الأسرة وتبين إمكانية المرونة فى اختيار الدخل حتى عندما يكون معظم دخل الأسرة يأتى من مرتبات لوظائف عدد ساعات عملها ثابت ، وهناك الالاف من أفراد المجتمع الذين يحددون بمحض اختيارهم عدد الساعات الأسبوعية التى يعملونها .. أمثال هؤلاء الفلاحين ، وأصحاب الأعمال الصغيرة ، وأصحاب المهن المختلفة وغيرهم من الأفراد الذين لا يعملون لدى الغير .

٣ — منحنيات السواء للدخل وأوقات الفراغ (الراحة) :

سنعرض فيما يلى بعض منحنيات السواء التى تبين الدخل والراحة كبدائل ؟ فالأسبوع يتكون من ١٦٨ ساعة ، فلو فرضنا أن الفرد يستخدم ١٢ ساعة فى اليوم للنوم والأكل ، واللبس ، والانتقالات من وإلى العمل .. الخ ، فان أقصى مايتاح له من وقت فراغ (لايعمل فيه) هو ٨٤ ساعة فى الأسبوع . ويصور الشكل (٣ — ٣) ثلاث من منحنيات سواء من بين خريطة كاملة للسواء، ويقاس



شكل (٣-٣) منحنيات السواء للدخل والفراغ

الدخل النقدى على الإحداثى الرأسى بعدد الجنيهات التى يحصل عليها الفرد فى الأسبوع ، أما الاحداثى الأفقى عندما نقرأه من اليسار إلى اليمين يبين لنا عدد ساعات العمل فى الأسبوع ، وعندما نقرأه من اليمين إلى اليسار يبين لنا عـدد ساعات العمل الأسبوعية ، ولننظر إلى منحنى السواء [1] ، لنجد أنه يبين المجموعات المختلفة من الدخل والفراغ التى تتساوى الرغبة فيهم .

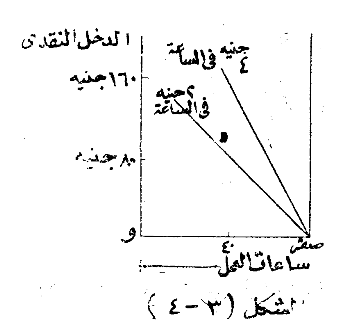
وتشير النقطة « أ » إلى مجموعة واحدة منهم ، بينما تشير النقطة «ب» إلى مجموعة أخرى .

وعندما ينتقل الفرد من النقطة (أ) إلى النقطة (ب) فإنه يضحى بالدخل ولكنه يزيد من الفراغ بدرجة تعوضه عن الدخل المضحى بـه بحيث تصبح المجموعتين سواء بالنسبة له ، وكذلك سواء بالنسبة للمجموعات الأخرى على نفس المنحنى . ومع بقاء الأشياء الأخرى على حالها ، فان الفرد ما يفضل الدخل الأعلى على الدخل الأقل . لذلك فان أى مجموعة على منحنى السواء ٢) تفضل عن أى مجموعة على المنحنى ١ والمنحنى ٣ أكثر ارتفاعاً وأكثر تفضيلا عن المنحنى ١ .

ولكن ماهى أشكال هذا النوع من منحنيات السواء؟ يلاحظ أن المحنيات المبينة بالشكل (٣ — ٣) تهبط سريعاً فى أول الأمر (أى إلى اليسار) ثم تبدأ فى الانبساط بعض الشىء . ويعنى ذلك أن منفعة ساعة الفراغ (الراحة) كبيرة عندما تكون عدد ساعات الفراغ قليلة . ولكن عندما تكون ساعات الفراغ كثيرة فان التضحية بالدخل للحصول على مزيد من ساعات الفراغ لن تكون كبيرة . ومن ثم تكون منحنيات السواء مستوية تماماً بالنسبة للفرد الذى لا يرغب فى الحصول على أى مزيد من وقت الفراغ أو الراحة . وقد تكون منحدرة إنحداراً شديداً للفرد الذى يود تضييع أكبر قدر ممكن من الوقت فى

التعطل . لهذا ، فان التباين بين أشكال منحنيات السواء يمكن استخدامه فى وصف العديد من نماذج التصرف فى الدخل والفراغ .

ويمكن تمثيل الاختلافات فيا يدفع فى الساعة (مكافآت او معدلات اجور عمولات ... الخ) بيانيا فى شكل خطوط مستقيمة يصور ميلها درجة الاختلاف كما هو واضح بالشكل (٣ — ٤) ، حيث تمثل المسافة (صفر و) عدد ٨٤ ساعة من ساعات العمل . ويشير الخط المنون بـ ٢ جنيه فى الساعة إلى الدخل الأسبوعى الذى يمكن الحصول عليه بالعمل إعداد مختلفة من الساعات بسعر ٢ جنيه للساعة . أما الخط المشار إليه بـ ٤ جنيه يبين ضعف الدخل الذى يمكن اكتسابه بالعمل لنفس العدد من الساعات . لذلك فان ميل هذه الخطوط يصور معدلات الأجور بالساعة .

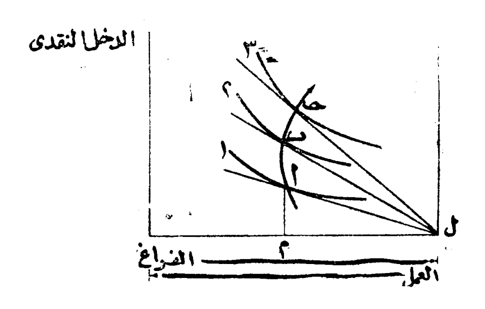


الشكل (٣ – ٤)

الأختيار الأمثل The, Cptimum Choict

والآن نود معرفة الحل الأمثل . فالفرد الرشيد الذى يستعرض كل

الإمكانيات المتاحة أمامه والذى يحسب باتزان وروية أفضل الأوضاع بالنسبة له ، يود أن يصل إلى أعلى منحنى ممكن . ويصور الخط (ل أ) بالشكل (٣—٥) أحد معدلات الأجور بالساعة . فاذا كان هذا هو الأجر السائد فعلا ، فان أعلى منحنى سواء يستطيع الفرد الوصول إليه هو المنحنى (١) حيث يمس الخط المستقيم عند النقطة (أ) . وهنا يعمل الفرد (ل م) من الساعات فى الأسبوع . فإذا رغب فى العمل عدد آخر من الساعات سينقل إلى منحنى سواء أدنى . وتظهر معدلات الأجور الأعلى الأعلى فى ميل الخطوط (ل ب) و (ل حـ) . وتمثل النقط (ب) و (حـ) نقط تماس أيضا . ويوصل الخط (أ ب حـ) بين التماس ويعنى



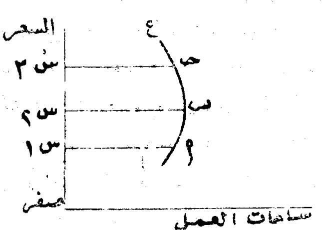
الشكل (٣ — ٥) المجموعات المثلى من الدخل والعمل

أنه كلما ارتفع معدل الأجور فان الفرد يبدأ فى أول الأمر فى زيادة عدد الساعات التى يعمل بشكل كبير ثم يبدأ فى زيادة أوقات عمله بدرجة أقل بعد ذلك . وليس ضرورياً أن يأخذ الخط (أ ب حـ) نفس الصورة المعروضة بالشكل (٣ — ٥) فقد يأخذ الشكل أى صورة أخرى لأن شكل هذا الخط يعتمد

على موضع نقط تماس منحنيات السواء مع الخطوط المستقيمة . وهذه بدورها تعتمد على أشكال منحنيات السواء .

منحنى العرض المرتد إلى الخلف The B ckward-Slopi g Curve

إن العمليات التي نستخرجها من منحنيات السواء أمثال تلك المنحنيات الموجودة بالشكل (٣ — ٥) يمكن إعادة ترتيبها وعرضها في شكل عادي يبين العلاقة بين السعر والكمية . وهذا ما فعلناه في الشكل (٣ — ٦) . حيث يصور المنحنى (حـ ب أ) منحنى العرض ، والذي يبين العلاقة بين معدلات الأجر (السعر) وعدد ساعات (الكمية) العمل الأسبوعية[١] . ويسمى مثل هذا المنحنى الذي يظهر بالشكل (٣ — ٦) بالمنحنى المرتد إلى الخلف ، على الرغم من أن الجزء (ب حـ) فقط الذي يتجه إلى الخلف أي إلى أعلى تجاه اليسار .



الشكل (٣ - ٦) منحنى عرض العمل لأحد الأفراد

ويشتق منحنى العرض المرتد على نفسه بالشكل (٣ — ٦) من الشكل

---

(١) يظهر المنحنى (أ ب حـ) في الشكل (٣ — ٥) عكس اتجاه المنحنى (حـ ب أ) في الشكل (٣ — ٦) والسبب في ذلك يرجع إلى أن الشكل (٣ — ٥) يقيس العمل من اليمين إلى اليسار بينما الشكل (٣ — ٦) يقيس العمل من اليسار إلى اليمين .

(٣ — ٥) ومن ثم فهو يمثل منحنى العرض لفرد . غير أن نفس المنحنى يمكن تطويره ليعكس منحنى عرض مجموعة من الأفراد فى سوق العمل عندما تنضم إليه منحنيات عرض الأفراد الآخرين . وكل ما نحتاجه هو تعديل الأرقام المقاسة على الأحداثى الأفقى . وبذلك يمكن لنفس المنحنى أو أى منحنى شبيه له أن يستخدم فى تصوير استجابة جميع أفراد القوة العاملة فى المجتمع للمستويات المختلفة من الدخل . وهنا يعاد تحديد الأحداثيات (فالكميات تتحول إلى مئات الملايين من الرجل / ساعة ، ويصبح السعر متوسط الدخل الحقيقى لكل فرد يعمل .

والشىء الجدير بالانتباه حول منحنى العرض المرتد إلى الخلف أنه ينظر إليه فى بعض الأحيان على أنه بمثابة اهانة للأفراد الذى يصف سلوكهم ، فالافراد فى البلاد المختلفة قد يحددون لأنفسهم مستوى معين من المعيشة ، ولا يحتاجون إلى زيادة دخولهم أكثر مما هو ضرورى للحصول على السلع والخدمات العادية . ولذلك فانه عندما يبدأ مثل هؤلاء الأفراد فى العمل فى منشآت تجارية حديثة ، فانهم يعملون فترة تكفى لاكتساب حجم من الدخل يكفيهم ، ثم يتوقفون بعد ذلك . ويقترح البعض أنه حتى يمكن الحصول على مزيد من العمل من هؤلاء الأفراد ، ينبغى تخفيض أجورهم . ولكن عندما يبدأ هؤلاء الأفراد فى التعرف على السلع وخدمات جديدة يتركون عاداتهم القديمة ، يتجهون إلى السعى وراء زيادة دخولهم للحصول على كل ما هو جديد حديث . ويجدون أن الدخول مهما زادت تعجز عن اشباع كل ما يرغبه الفرد . ومن ثم يصبح ميل منتجات العرض موجب .

لكن تحليل منحنى السواء بين أن منحنى العرض المرتد إلى الخلف يمكن أن ينطبق على المستويات الرفيعة من الناس كما ينطبق على البسطاء من الأفراد ، والمسألة هى مجرد مسألة أشكال منحنيات السواء أى الأهمية المتصلة

بالدخل والفراغ فمنحنيات عرض العمل المرتدة إلى الخلف ربما تكون شيء عام ، فعندما تكون الدخول منخفضة فان منحنيات العرض تكون موجبة الميل . ولكن عندما يرتفع الدخل فوق مستوى معين ، يبدأ وقت الفراغ ينافس الدخل منافسة قوية وتغير منحنيات العرض ميلها متجهة إلى الخلف وبذلك تنخفض ساعات العمل الأسبوعية[1] .

---

(١) تنطبق آثار الدخل والاحلال أيضا على الاختيار بين الدخل والفراغ ، ولترضيح ذلك دعنا ننظر إلى الخطين « ل أ » و « ل حـ » ، في الشكل (٣-٥) فالتغيير من « ل أ » إلى « ل جـ » يمثل زيادة في معدل الدفع . ويكون الأثر الكلى للزيادة هو الانتقال من النقطة « أ » إلى النقطة « حـ » ويمكن إيجاد أثر الاحلال بالطريقة التالية :

ارسم خط مستقيم موازى للخط « ل جـ » واجعله يمس منحنى السواء « أ » والخط الجديد يمثل ضريبة دخل تخيلية تجعل الفرد يحتفظ على نفس مستوى الإشباع الأصلي . وعلى اليمين يقطع الخط الجديد الاحداثى الرأسى أسفل النقطة « ل » وتمثل المسافة (السالبة) بين تقاطع الاحداثى الرأسى (الدخل) والنقطة « ل » مقدار الضريبة التخيلية على الدخل الاسبوعى . ولما كانت أكثر انحدارا من الخط « ل أ » ، فان الخط الجديد لابد وأن يمس منحنى السواء (١) عند نقطة على يسار النقطة « أ » ويمثل الفرق بين النقطة « أ » ونقطة التماس أثر الاحلال وهى هنا تكون دائماً موجبة . ويعنى ذلك أن ارتفاع معدلات الدفع (والتى يعوض عنها الضريبة التخيلية التى تبقى الفرد على نفس منحنى السواء الأصلى تؤدى إلى اختيار المزيد من ساعات العمل ، ولكن أثر الدخل يمكن أن يعمل فى كلا الاتجاهين(لزيادة ساعات العمل ، أو الغاء أثر الاحلال، ومن ثم يخفض ساعات العمل ، وأثر الدخل فى الاختيار بين الدخل والفراغ أكثر أهمية من حالة شراء السلع والخدمات ، لأن معظم الأفراد لديهم نوع واحد فقط أو نوعين من الخدمات يمكنهم بيعها وللآخرين .

هل تحمل ضرائب الدخل الأفراد إلى العمل أقل ؟ الحقيقة أنه لا توجد إجابه صريحة واضحة لهذا السؤال المعقد الذى يثير الجدل لأن الاجابة تعتمد أساسا على ميل منحنيات عرض العمل . فاذا كانت جميعها موجبة ، فان الضريبة ستؤدى بالقطع إلى تخفيض عدد الساعات التى يرغب الأفراد تخصيصها للعمل ، لأن الضريبة تخفض السعر (أى الدخل) المحصل ، ومن الناحية الأخرى ، إذا كان ميل كل منحينات العرض سالبة تكون الآثار عكس ذلك ، فضرائب الدخل على عرض مزيد من العمل وليس أقل . ولكن على ضوء مايتوافر من معلومات لا يستطيع أحداً أن يعلم شيئا عن عدد الملايين من الأفراد الذين يتبعون نوع واحد من منحنيات العرض وعدد الملايين فى النوع الآخر كذلك لا أحد يعرف عدد الأفراد الذى يكون منحنى العرض لهم يرتفع إلى أعلى تجاه اليمين ثم يرتد بعد ذلك إلى الخلف . ويعتمد أثر ضريبة الدخل على ماإذا كان هؤلاء الأفراد على هذه المنحنيات . كذلك فإن الميول تجاه تفضيل الفراغ أو الدخل دائمة التغير عبر الزمن مثل تغير الأذواق على السلع الاستهلاكية ، لذلك فإن ، آثار ضرائب الدخل تتعقد بدرجة أكبر نتيجة لهذه التغيرات وانتقال منحنيات عرض العمل .

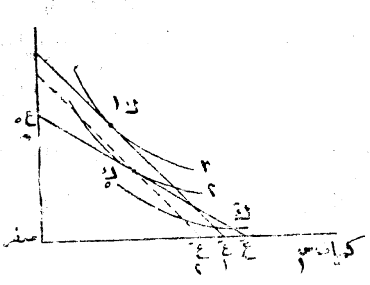
٤ — نظرية الأرقام القياسية :

يمكن إجراء أحد التطبيقات الأخرى لتحليل منحنى السواء فى مجال الأرقام القياسية . ولتبسيط الحل سنركز انتباهنا على حالة مستهلك يشترى سلعتين « س ١ » و « س ٢) فى فترتين مختلفتين من الزمن « صفر » و « ١ » . ويشترى فى الفترة « صفر » « س ١ » وحدة من « س ١ » بسعر « ع ١ » ويشترى « س ٢ » وحدة من « س ٢ » بسعر « ع ٢ » . كذلك ، يشترى فى الفترة « ١ » « س^{1}١ » وحدة من « س ١ » بسعر » ع^{1}٢ و (س^{1}٢) وحدة من السلعة

(س ٢) بسعر ع'٢ . والمشكلة الأساسية للأرقام القياسية هى : هل ارتفع مستوى معيشة الفرد أم إنخفض فى الفترة (١) بالمقارنة بالفترة (صفر) ؟.

وحتى يكون لمقارنة مستويات المعيشة معنى ومدلول ، يجب أن نفترض أن أذواق المستهلك (خريطة التفضيل) لا تتغير على طول الفترة الزمنية محل الدراسة وعلى ضوء هذا الفرض يمكننا الحصول بعض المعلومات من تحليل منحنى السواء .

وتظهر خريطة السواء للمستهلك ، جزئياً ، فى المنحنيات ١ و٢و ٣ بالشكل (٣ — ٧) . ففى الفترة الأصلية (والتى تسمى فترة الأساس) نجد أن دخل المستهلك النقدى والأسعار (ع ١) و (ع ٢) تكون خط الميزانية ع ع . ويصل المستهلك إلى التوازن عند النقطة ك . على منحنى السواء ٢ . وتتغير الأسعار فى الفترة (١) ومن ثم تصبح خط الميزانية ع١ ع١ (سعر س ٢ يرتفع وسعر س ١ ينخفض) . ويصل المستهلك إلى توازن جديد عند النقطة (ك ١) على منحنى السواء ٣ والحقيقة أن خريطة السواء معروفة فى هذه الحالة ويمكننا أن نعرف



الشكل (٣-٧) تطبيق تحليل منحنى السواء على الأرقام القياسية

من خلالها أن المستهلك قد حقق كسبا فى دخله الحقيقى لأنه انتقل إلى منحنى سواء أعلى .

ولكن فى الحالات العادية ، لا تكون منحنيات السواء معروفة ، فبدلا من وجود شكل كامل مثل الشكل (٣ — ٧) يمكن للفرد الحصول على خطوط أسعار ونقط الاستهلاك (ك ٠) و (ك ١) فقط . ولنفرض أننا أزلنا المنحنيات ١ و ٢ و ٣ فبدون معلومة عن منحنيات السواء[1] . ماذا يمكن أن نقول عن التغير فى الدخل الحقيقى للمستهلك ؟

ففى غياب مثل هذه المعلومة فأننا نتجه إلى التحليل على النحو التالى :

المعلومات التى يمكن استخراجها من خريطة الميزانية .

أولا : النقطة ك ٠ تفضل عن أى نقطة أخرى تقع أعلى أو أسفل خط السعر ع.ع لأن كل الميزانيات الواقعة فى نطاق المساحة صفر ع.ع ميزانيات مسموح بها (يمكن تحقيقها) و ك ٠ هى الميزانية التى وقع عليها الاختيار فعلا . كذلك فإن ك ١ لابد وأن تكون مفضلة عن أى مجموعة تقع على أو أسفل خط الميزانية ع ع١ .

ثانياً : فى هذه الحالة بالذات يمكننا أن نقرر أن المستهلك قد حقق بالقطع زيادة فى مستوى معيشته لأن ك ٠ تقع أسفل خط الميزانية ع ع١ .

---

(١) باستثناء للعلومة فى أنه إذا لم يحقق المستهلك توازن ، فإن كل من ك ٠ و ك ١ يقع على إحدى منحنيات السواء .

غير أن هذا النوع من الاستنتاج غير ممكن بصفة عامة . فمثلا ، قد يكون المستهلك قام بشراء مجموعة مثل $\bar{ك}_{٠}$ فى الفترة (صفر)[1] . وتقع للميزانية $\bar{ك}_{٠}$ على يمين خط الميزانية $ع_١ ع_١$. لذلك لا يمكن استنتاج أى شيء منها • ولكن بعض المعلومات الإضافية يمكن الحصول عليها .

فالإنفاق الإجمالى فى الفترة (١) هو $ع_١^١ س_١^١ + ع_٢^١ س_٢^١$. بينما إجمالى تكاليف السلع فى الفترة (صفر) كان $ع_١^٠ س_١^٠ + ع_٢^٠ س_٢^٠$ ولقد انفقت الميزانية ك ٠ فى الفترة (صفر) بالأسعار الجارية آنذاك . والميزانية ك ١ استخدمت فى الفترة (١) بأسعار السنة (١) . فإذا كانت ك ٠ تفضل حقيقة عن ك ١ (مع العلم بأن ك استخدمت بالفعل فى الفترة ١) فإنه لابد وأنه كان يستحيل على المستهلك شراء المجموعة ك . بالأسعار السائدة فى الفترة ١، وبعبارة أخرى إذا كانت ك . مفضلة على ك ١ وإذاً كانت ك. يمكن الحصول عليها بأسعار الفترة ١ لكان قد اشتراها المستهلك بدلا من $ك_١$ • لذلك فان إجمالى تكلفة الميزانية ك . بأسعار الفترة ١ ، فى هذه الحالة، لابد وأنها تزيد على تكلفة ك ١ بأسعار الفترة ١ • أي أنه ، إذا كانت ك ٠ مفضلة على ك ١ فإن الصورة التالية تتحقق :

$$ع_١^١ س_١^٠ + ع_٢^١ س_٢^٠ > ع_١^١ س_١^١ + ع_٢^١ س_٢^١$$

وبتحويل هذه الحجة للتركيز على الفترة ١ (السنة الجارية) فإن ك ١ كان يمكن أن تكون مفضلة على ك ٠ إذا كان من الممكن حينذاك شراء كميات

---

(١) إذا عرفت خريطة السواء ، فان هذه النقطة لا تمثل حالة توازن أو ميزانية مثلى •

سنة الأساس بأسعار السنة الجارية (ولما كانت ك ١ قد اشترت بالفعل ، يكون معلوم أن المستهلك قد فضل عدم شراء ك ٠) . وبعبارة أخرى ، فان تكلفة الميزانية ك ٠ بأسعار الفترة (١) لابد وأنها كانت أقل من تكلفة الميزانية ك ١ بأسعار الفترة (١) . ولهذا فان ك ١ كان يمكن أن تكون مفضلة على ك ٠ إذا ، وإذا فقط :

$$ع^{1}_{1} س^{1}_{1} + ع^{1}_{2} س^{1}_{2} > ع^{1}_{1} س^{0}_{1} + ع^{1}_{2} س^{0}_{2}$$

وبكتابة هذه الصيغة على الصورة المختصرة التالية :

$$مج ع^{1} س^{1} > مج ع^{1} س^{0} \qquad (٣-١)$$

وبنفس الطريقة يمكن القول بأن ك٠ كان يمكن أن تكون مفضلة على ك١ لو أنه كان من الممكن شراء كميات السنة الجارية بأسعار سنة الأساس .

أى أن المستهلك كان قد اشترى الميزانية ك٠ فى الفترة « صفر » . فإذا كان من الممكن له شراء الميزانية ك١ بأسعار سنة الأساس ولكنه لم يفعل ذلك فإن ذلك يعنى أنه لابد وقد فضل ك٠ على ك١ . ولهذا فإن الفرد يكون فى وضع أفضل فى الفترة « صفر » بالمقارنة بالفترة (١) إذا كان :

$$مج ع^{0} س^{0} > مج ع^{0} س^{1} \qquad (٣-٢)$$

ويمكن عرض هاتين المتباينتين بيانياً ، إلا أننا عبرنا عن الصورة الأولى (٣ — ١) فقط فميل خط الميزانية : $ع_1 ع_1$ يشير إلى أسعار الفترة ١ . وتقل تكلفة كميات السنة الجارية عن الإنفاق الفعلى فى السنة الجارية عندما تقع ك٠ على الخط الموازى (وأسفل) للخط $ع_1 ع_1$.

ولما كانت ك_{0} تقع (فى الشكل ٣ — ٧) على الخط $\overline{\text{ع}_{2}\text{ع}_{2}}$ والذى يوازى $\overline{\text{ع}_{1}\text{ع}_{1}}$ ولكنه أقرب إلى نقطة الأصل ، فإن المتباينة (٣ — ١) تتحقق . وكما ذكرنا سابقاً فإنه من الواضح أن ك_{1} تفضل على ك_{0} ولكنه يصعب تحديدها بهذه السهولة فى الحالات الأخرى .

الأرقام القياسية كمؤشرات للتغيرات فى رفاهية الفرد :

يمكن الاسترسال فى التحليل بتقديم ثلاثة أنواع من الأرقام القياسية . أول هذه الأرقام القياسية يقيس التغير فى دخل المستهلك من سنة الأساس إلى سنة جارية . ولما كان من المفترض أن الدخل يتعادل مع الإنفاق ، فان الدخول فى سنة الأساس تكون هى : $\text{مح}\ \text{ع}^{0}\ \text{س}^{0}$ وفى السنة الجاريه هى : $\text{مح}\ \text{ع}^{1}\ \text{س}^{1}$ وبالتالى فان الرقم القياسى للتغير فى الدخل هو :

$$\text{ن} = \frac{\text{مح}\ \text{ع}^{1}\ \text{س}^{1}}{\text{مح}\ \text{ع}^{0}\ \text{س}^{0}} \qquad (٣ - ٣)$$

والرقم القياسى الاخر هو رقم ليسبير Laspeyre . ويقيس هـــذا الرقم القياسى تكلفة (منسوبة لسنة الأساس) شراء كميات سنة الأساس بأسعار السنة الجارية . وحيث أن تكلفة كميات سنة الأساس بأسعار السنة الجارية هى : $\text{مح}\ \text{ع}^{1}\ \text{س}^{0}$ ، فان رقم ليسبير هو :

$$\text{ل} = \frac{\text{مح}\ \text{ع}^{1}\ \text{س}^{0}}{\text{مح}\ \text{ع}^{0}\ \text{س}^{0}} \qquad (٣ - ٤)$$

وأخيراً ، يقيس رقم باش Paasche تكلفة شراء كميات السنة الجارية بأسعار السنة الجارية منسوبة إلى تكلفتها بأسعار سنة الأساس . ولما كانت

تكلفة كميات السنة الجارية بأسعار سنة الأساس هى : $\text{مج ع}^{١}\text{ س}^{١}$ ، فان رقم باشن هو :

$$\text{ب} = \frac{\text{مج ع}^{١}\text{ س}^{١}}{\text{مج ع}^{٠}\text{ س}^{٠}} \qquad (٣ — ٥)$$

وتبين العبارة (٣ — ١) أن الفرد يكون فى وضع أفضل فى الفترة « ١ » إذا كان $\text{مج ع}^{١}\text{ س}^{١} > \text{مج ع}^{١}\text{ س}^{٠}$. وبقسمة كلا جانبى المتباينة على $\text{مج ع}^{٠}\text{ س}^{٠}$ ، فاننا نحصل على :

$$\frac{\text{مج ع}^{١}\text{ س}^{١}}{\text{مج ع}^{٠}\text{ س}^{٠}} < \frac{\text{مج ع}^{١}\text{ س}^{٠}}{\text{مج ع}^{٠}\text{ س}^{٠}} \qquad (٣ — ٦)$$

أو أن :

$$\text{ن} < \text{ل} \qquad (٣ — ٧)$$

كذلك يتضح من العبارة (٣ — ٢) أن الفرد يكون فى وضع أفضل فى سنة الأساس إذا كان $\text{مج ع}^{٠}\text{ س}^{٠} > \text{مج ع}^{٠}\text{ س}^{١}$. وبقسمة طرفى المتباينة على $\text{مج ع}^{١}\text{ س}^{١}$ ، نحصل على :

$$\frac{\text{مج ع}^{٠}\text{ س}^{٠}}{\text{مج ع}^{١}\text{ س}^{١}} < \frac{\text{مج ع}^{٠}\text{ س}^{١}}{\text{مج ع}^{١}\text{ س}^{١}} \qquad (٣ = ٨)$$

أو :

$$\frac{١}{\text{ن}} < \frac{١}{\text{ب}} \qquad (٣ — ٩)$$

أو :

و > ب (٣ — ١٠)

ومن هـذا التحليل ، وخاصة العبارات الجبرية (٣ — ٧) ، و (٣ — ١٠) يتضح أن هناك أربعة حالات ممكنة :

١ — و تكون أكبر من (ب) أو (ل) . فطبقاً للعبارة (٣ — ٧) يزيد مستوى معيشة الفرد من الفترة (صفر) إلى الفترة (١) . وتبين العبارة(٣ — ١٠) فان مستوى معيشته لاينخفض . ولهذا فان الفرد يكون بالتأكيد فى وضع أفضل فى الفترة (١) .

٢ — و أقل من (ب) أو (ل) فطبقاً للعبارة (٣ — ١٠) يكون الفرد فى وضع أفضل فى سنة الأساس وفى العبارة (٣ — ٧) لم يكن فى وضع أفضل فى الفترة (١) . ومن ثم فاننا نحصل بذلك على إجابة واضحة وهى :

أن مستوى معيشة الفرد ينخفض من الفترة (صفر) إلى الفترة (١) .

٣ — ل > و > ب . وفى هـذه الحالة لن تتحقق العبارة (٣ — ٧) أو العبارة (٣ — ١٠) . ل > و تتضمن أن المستهلك ليس فى وضع أفضل فى الفترة (١) . ولكن و < ب تتضمن أنه لم يكن فى وضع أفضل فى الفترة (صفر) كذلك . ولذلك لا يمكن استخلاص أى نتيجة من ذلك .

٤ — ب > و > ل وهذه الحالة ، وإن كانت ممكنة ، إلا أنها متناقضة غير متسقة فطبقاً للتغيير (٣ — ١٠) ، ب > و

تتضمن أن الفرد كان فى وضع أفضل فى سنة الأساس . ولكن ى > ل يتضمن طبقاً لـ (٣ — ٧) أنه كان فى وضع أفضل فى الفترة (١) كذلك . ويعنى ذلك أن مستوى المعيشة قد ارتفع وانخفض فى نفس الوقت . وقد يعزى مثل هـــذا التناقض إلى التغير فى نمط تفضيل الفرد . وفى جميع الأحوال ، فانه يحول دون استنتاج أى شىء حول التغير فى رفاهية الفرد .

والخلاصـــة :

أنه يكون ممكناً ، فى بعض الأحيان ، تحديد ماإذا كان مستوى معيشة الفرد قد ارتفع أو انخفض بمقارنة الأرقام القياسية . وفى بعض الأحيان الأخرى تكون النتائج شاملة أو متناقضة . وفى هذه الحالات لا تساهم نظرية الأرقام القياسية بأى شىء فى تحليل التغيرات فى رفاهية الفرد .

الفصل الرابع

التحليل الرياضى لسلوك المستهلك

مقدمة :

عند تكوين النظريات الاقتصادية نستخدم ثلاثة أنواع من الأشياء :

النوع الأول : وهو المتغيرات الاقتصادية Variables وهى الأشياء التى نعتبر أنفسنا مسئولين عن تفسيرها بالنظرية الاقتصادية . وهذه الأشياء تختلف من نظرية لأخرى . كما تختلف حسب طبيعة التحليل سواء كان تحليل استاتيكى أو ديناميكى .

النوع الثانى : هو المعلومات Data ويشمل جميع الظواهر الأخرى سواء كانت اقتصادية أو غير اقتصادية والفروض أن هذه الظواهر تؤثر فى المتغيرات ولا تتأثر بها . بحيث يضطر الكاتب إلى تحليل الآثار التى تصيبها .

النوع الثالث : بعد تقسيم الظواهر إلى متغيرات أو معلومات يبدأ الباحث فى صياغة نظرياته ، أى فى تكوين العلاقات بين هذه الظواهر وبعضها البعض . وهو فى هذا يلجأ إلى وضع عدد من الفروض Assumption التى تساعد على أحكام التحليل مثل فرض السعى نحو أقصى اشباع أو أقصى ربح ... الخ .

وبهذا يتمكن الكاتب من تكوين ما يسمى بنموذج رياضى Moldel

يصف بشىء من التبسيط ما يجرى فى الواقع . هذا النموذج يتكون من عددٍ من المعادلات يساوى عدد المتغيرات التى لدينا . وتتوقف دقة النموذج على شيئين :

الأول : سلامة التحليل المنطقى أو التحليل الرياضى الذى استخدم فى صياغة النموذج وفى الوصول إلى نتائجه .

خاص بمدى مطابقة النظرية للواقع . الأمر الذى يتوقف إلى حد كبير على دقة الفروض التى يستخدمها الكاتب .

من هذا يتضح أن أى محاولة لصياغة نظرية ما يجب أن تكون مشفوعة ببيان واضح عن نوع المتغيرات ونوع الفروض ، وتفسير كامل لكل متغير .. هذا الأمر من السهل أن يتم لو لجأنا إلى الأسلوب الرياضى ، خاصة وأن هذا الأسلوب يضمن باستمرار عدم إهمال بعض المتغيرات أو استخدام فروض تخالف الفروض الأصلية التى قصدها الباحث . غير أن هذا التحليل فى ذاته لا يساعدنا على الوصول إلى أكثر مما تحمله فروضه من دقة . ولذلك لا يعنى مجرد صياغة نظرية معينة فى أسلوب رياضى أنها قد أصبحت أكثر دقة من مثيلاتها اللفظية .

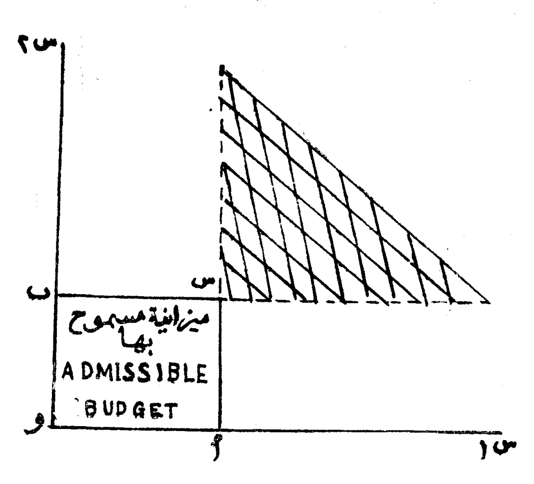
نظرية المستهلك

وفى دراسة نظرية المستهلك نحدد أولا نوع المتغيرات التى ندرسها ونـــوع البيانات فنجد أنه بالنسبة لفرد واحد يمكن اعتبار أن السعر الذى يتحـــدد فى السوق لسلعة معينة خارجا عن نطاق تصرفاته . ولذلك فهو من قبيل المعلومات ، كذلك الدخل الذى يحصل عليه الشخص فى فترة معينة من الزمن لا يتأثر عادة بتصرفاته الاستهلاكية وإنمـا يؤثر فيها ، ولذلك سنعتبرها أيضـاً من قبيـــل المعلومات . ويكون الشىء الأساسى الذى يعكس تصرفات المستهلك هو الكميات التى يستهلكها من السلع المختلفة . وبعبارة أخرى فأننا سنعتبر فى التحليـــل الاستاتيكى للمستهلك أن المتغيرات هى الكميات المستهلكة من السلع المختلفة لمستهلك معين نعتبره الوحدة التى تمثل مجموعة المستهلكين .

ويلاحظ أننا قسمنا بعض الظواهر إلى متغيرات ومعلومات والواقع أن هناك ظواهر اقتصادية أخرى تمس المستهلك ولكننا لم نظهرها صراحة لأنها تعتبر ضئيلة الأثر بالنسبة لتحليل سلوك المستهلك . ولذلك فهى من قبيل المعلومات غير اللازمة Irrelevant data .

الخطوة التالية لذلك هى أن نسعى إلى تكوين الفروض التى يتم على أساسها التحليل ، وسوف نلخص فيما يلى هذه الفروض ونبين فى نفس الوقت الوسيلة البيانية لتمثيلها ، نظراً لأن هذه الوسيلة تساعدنا على توضيح الآراء التى يمكن استخلاصها أما من التحليل المنطقى أو الرياضى . غير أن الشىء الذى يجب أن نؤكده هو أن هـذه الوسيلة إن هى إلا أداة للتعبير وليست وسيلة للاستنتاج فى حد ذاتهـا . ومن هنا لا يمكن اعتبارها جزءاً أساسياً من التحليل الرياضى فى الاقتصاد .

ولدراسة سلوك المستهلك نفترض للتبسيط أن لدينا سلعتين فقط (س١، س٢)، ونعتبر أنه من الممكن تمثيل هاتين السلعتين فى مستوى يسمى الميزانيات هذا المستوى هو عبارة عن الربع الأول المحصور بين المحورين (س ١ ، س ٢) لأن أي نقطة داخل هذا الربع مثل س يمكن اعتبارها ميزانية مقبولة بالنسبة للمستهلك ، بمعنى أنه يستطيع أن يحصل على الكميتين و أ من (س ١، و ب من س ٢) لو تيسر له الموارد اللازمة لذلك . وبناء عليه نعتبر أن كل نقطة فى هذا الربع هى ميزانية مسموح بها Admissible Budget



الشكل (٤ - ١) مستوى الميزانيات

كل ميزانيه يرتبط بها اتفاق معين :

وواضح أن كل ميزانية يرتبط بها اتفاق معين يتوقف على الأسعار السائدة التى تكون معلومة للمستهلك فى نقطة معينة من الزمن.

فلو فرضنا أن سعر السلعة الأولى هو ع ١ وسعر السلعة الثانية هو ع ٢ فإن الإنفاق على السلعتين (على الميزانية س) هو :

س ١ × ع ١ + س ٢ × ع ٢

هذا الإنفاق الكلى يجب أن يكون فى مقدور المستهلك أن يحصل على هذه الكميات أى يحقق هذا الإنفاق . ومن هنا نجد أنه لو افترضنا أن المستهلك لن يستدين فإنه سوف يراعى أن ينتقى ميزانيه من الميزانيات لا يتجاوز الإنفاق عليها دخله الجارى . فإذا كان هذا الدخل هو ق فانه يراعى أن يكون :

س ١ ع ١ + س ٢ ع ٢ > ق

وهذه العلاقة تعتبر فى الواقع حداً للميزانيات المسموح بها فى ظروف معينة لمستهلك معين . ومن الممكن أيضاً أن ندخل فرضاً آخر ينص على أنه إذا زادت الكمية المستهلكة من إحدى السلعتين أو من كليهما فإن المستهلك يحصل على اشباع أكثر مما يحصل عليه عند النقطة الأصلية . وبعبارة أخرى فإن المستهلك يفضل جميع النقط الواقعة فى المنطقة المظللة عن س نظراً لأنه فى هــــذه المنطقة تكون إحدى السلعتين ، على الأقل ، قد زادت عنها فى س .

ومن وجهة أخرى فإن س تعتبر أفضل من أى نقطة فى المربع (و أ س ب) غير أن هذا الفرض فى حد ذاته لا يكفى للتعبير عن جميع النقط الواقعه داخل مستوى الميزانيات . فهناك النقط الواقعة إلى يسار أو أسفل المنطقة المظللة، وفيها تكون إحدى السلعتين قد زادت كميتها بينما الثانية نقصت . وبالعكس — مما يجعل من العسير أن نحدد تغير الأشباع فى هذه الحالة مالم تكن لدينا أداة فى ما يسمى بدليل الأشباع Utility index .

دليل الأشباع :

ولتكوين هذا الدليل نقول أن المستهلك يستطيع أن يحدد لكل ميزانية معينة ترتيباً معيناً من حيث درجة الأشباع . وأنه يستطيع أن يفعل ذلك بالنسبة لجميع الميزانيات بدون أدنى تضارب أو عدم تأكد من جهته . وبذلك نستطيع أن نقول أنه لو كان هذا المستوى للأشباع هو (ف) فإن قيمة (ف) تكون متوقفة بشكل محدد ومعلوم على قيمتى (س ١ ، س ٢) وهـذا ما نلخصه فى العلاقة :

ف = د (س١ ، س٢)

والمقصود بهذا أن الإشباع ف = د (س١ ، س٢) ونعتبر مؤقتاً أن هذه الدالة يمكن قياسها بطريقة ما ثم نثبت فيما بعد أنه من الممكن التخلص من ضرورة القياس هذه .. ومن الممكن أن تأخذ الدالة « ف » أى شكل فى مستوى الميزانيات .. ولن نحاول الآن أن نحدد شكلها وإنما نترك تعين صفاتها للتحليل الرياضى نفسه . وهذا فى الواقع لا يتطلب منا أكثر من أن نفترض أنها دالة متصلة Continuous Function ولأغراض التحليل نكتفى بأن تتطلب فى هذه الدالة بأن يكون لها المشتقات من الدرجة الأولى والثانية فقط

ويراعى بطبيعة الحال أن تكون الدالة محققة للغرض السابق ذكره ، وهو أنها تزيد فى القيمة كلما زادت س١ أو س٢ أو الاثنين منها بدون نقص فى أى منهما

وبعد هذا نترك للدالة (ف) أن تحدد التغير فى مستوى الإشباع عند زيادة إحدى السلعتين مع نقص الأخرى . فإذا أردنا أن نمثل هذه الدالة على مستوى الميزانيات ، وجدنا أن الطريقة الشائعة لذلك هى استخدام منحنيات السواء . وكما هو معروف فإن هذه المنحنيات يعين كل منها مستوى محدد للإشباع أى أنه بالنسبة لمنحنى معين يكون المقدار (ف) ثابتاً .

أى أن معادلة منحنى السواء هى :

ف = د (س١ ، س٢) = ثابت

وطبيعى أن شكل هذه المنحنيات يتوقف على الصفات العامة للإشباع وسوف تتضح لنا من التحليل الآتى :

تعيين الميزانية المثلى :

المعلومات التى لدينا حتى الآن لا تساعد على تحديد النقطة التى سوف يسعى إليها المستهلك والتى تمثل بالنسبة له الوضع الأمثل أو الميزانية المثلى .

فمن الواضح أن هناك عدد كبير من الميزانيات تتساوى عنده النفقات الكلية مع الدخل الكلى للفرد . وواضح أيضاً أنه أمام كل ميزانية من هذه الميزانيات يستطيع المستهلك أن يعين مستوى إشباع وفقاً للدالة (ف) . لذلك يجرى التحليل النظرى ، عادة ، على اعتبار أن المستهلك يسعى إلى جعل إشباعه

نهاية عظمى بشرط ألا يتطلب ذلك منه إنفاقاً يزيد دخله (ى) .. وبذلك يصبح النموذج الرياضى الذى يجب حله فى هــذه الحالة للحصول على توازن المستهلك مكوناً من المعادلتين الآتيتين :

ف = د (س١ ، س٢) = نهاية عظمى (١)

يجب حليها بشرط أن

ع١ س١ + ع٢ + ع٢ س٢ = ى (٢)

وهاتين المعادلتين كفيلتان بتحقيق كل من س١ ، س٢ لو أن شروط إيجاد النهايات العظمى رياضياً تحققت . ويعتبر حل هذا النموذج هو تعيين لنقطة التوازن (الميزانية المثلى) لأن الحل معناه حساب كل من س١ ، س٢ .

إيجاد نهاية عظمى لدالة فى متغيرين :

من المعلوم أنه لو كانت لدينا دالة مثل (ص) فى متغير واحد مثل (ط) أى (ص) = د (ط) .

فإن شروط النهاية العظمى هى :

د ص / د ط = صفر ؛ د٢ ص / د ط٢ أقل من صفر .

غير أنه فى بعض الأحيان تكون (ص) دالة فى متغيرين أو أكثر ، ويراد إيجاد قيمة المتغيرات التى تجعل (ص) نهاية عظمى فى هذه الحالة نفرض أن الدالة الأصلية كانت :

ص = د (س١ ، س٢)

ونسعى إلى جعل هذه الدالة متوقفة على متغير واحد فقط كالآتى :

لتكن النهاية العظمى للمتغير (ص) واقعة عندما تكون قيمة .

ش ١ = س ١ ، س ٢ = ش ٢

ولنرمز إلى الجزء المتبقى بين قيمة ما للمتغير س ١ ، قيمة ش ١ بالرمز ط ح ١ حيث ط = مقدار ما ، ح ١ تمثل الإنحراف فى س ١ معبراً عنه بوحدات من ط .

كذلك نعبر عن انحراف س ٢ عن قيمتها ش ٢ بالرمز ط ح ٢ .

وعلى ذلك تصبح كل من س ١ ، س ٢ كالآتى :

س ١ = ش ١ + ط ح ١

س ٢ = ش ٢ + ط ح ٢

أى أنه من الممكن تغيير كل من س ١ ، س ٢ وبالتالى ص فى وقت واحد بمجرد تغيير (ط) أى أنه من الممكن تصور (ص) دالة فى (ط) فقط بحيث أن (ص) تصل إلى نهايتها العظمى المناظرة للنقط (ش ١ ، ش ٢) بجعل (ط) تتغير حتى تصل إلى الصفر .

وبناءاً عليه يمكن أن نكتب الدالة الأصلية كالآتى :

ص = د (ط)

للدلالة على أن الأساس فى التغير هو (ط) وبذلك تحولت المسألة إلى دالة فى متغير واحد ويصبح تطبيق القواعد السابقة بسيط بالنسبة له .

الشرط اللازم للنهاية العظمى أو الصغرى :

هو أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د ط}} = \text{صفر}$

ولكن $\frac{\text{د ص}}{\text{د ط}} = \frac{\delta\,\text{ص}}{\delta\,\text{س}_1} \times \frac{\text{د س}_1}{\text{د ط}} + \frac{\delta\,\text{ص}}{\delta\,\text{س}_2}$

$\times \frac{\text{د س}_2}{\text{د ط}} = \text{ص}_1 \times \frac{\text{د س}_1}{\text{د ط}} + \text{ص}_2 \times \frac{\text{د س}_2}{\text{د ط}}$

حيث رمزنا إلى التفاضلات الجزئية بالرموز :

$\text{ص}_1 = \frac{\delta\,\text{ص}}{\delta\,\text{س}_1}$ ، $\text{ص}_2 = \frac{\delta\,\text{ص}}{\delta\,\text{س}_2}$

ولكن $\frac{\text{د س}_1}{\text{د ط}} = \text{ح}_1$ ، $\frac{\text{د س}_2}{\text{د ط}} = \text{ح}_2$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ط}} = \text{ص}_1\,\text{ح}_1 + \text{ص}_2\,\text{ح}_2$.

ويكون الشرط اللازم هو : $\text{ص}_1\,\text{ح}_1 + \text{ص}_2\,\text{ح}_2 = \text{صفر}$ (١)

أيا كانت ح_1 ، ح_2 . . وواضح أن هذا يعنى أن كلا من :

$\text{ص}_1 = \text{صفر} \text{ ، } \text{ص}_2 = \text{صفر}$.

ولإيجاد الشرط الثانى وهو $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د ط}^2} < \text{صفر}$

نلاحظ أولا أن ص_1 ، ص_2 متوقف كل منهما على س_1 ، س_2 لذلك فإن إيجاد تفاضل كل منهما بالنسبة إلى ط يتطلب مفاضلتها بالنسبة إلى س_1 ثم س_2 كما فعلنا تماماً عند مفاضلة ص نفسها .

$$\therefore \frac{\text{د ص}_1}{\text{د ط}} = \frac{\text{د}\left\{\frac{\partial\text{ص}}{\partial\text{س}_1}\right\}}{\text{د ط}} = \frac{\partial\text{ص}_1}{\partial\text{س}_1} \times \frac{\text{د س}_1}{\text{د ط}}$$

$$+ \frac{\partial\text{ص}_1}{\partial\text{س}_2} \times \frac{\text{د س}_2}{\text{د ط}}$$

وبالمثل $\frac{\text{د ص}_2}{\text{د ط}} = \frac{\partial\text{ص}_2}{\partial\text{س}_1} \times \frac{\text{د س}_1}{\text{د ط}} + \frac{\partial\text{ص}_2}{\partial\text{س}_2}$

ولـكن من الممكن تبسيط التعبير بإدخال الرموز الآتية :

$$\therefore = \frac{\partial\text{ص}_1}{\partial\text{س}_1} = \frac{\partial\left\{\frac{\partial\text{ص}}{\partial\text{س}_2}\right\}}{\partial\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\partial\text{س}_1^2}$$

$$\text{ص}_{٢١} = \frac{∂\,\text{ص}_{٢}}{∂\,\text{س}_{٢}} = \frac{∂\left(\frac{∂\,\text{ص}}{∂\,\text{س}_{١}}\right)}{∂\,\text{س}_{٢}} = \frac{∂^{٢}\,\text{ص}}{∂\,\text{س}_{١} \times ∂\,\text{س}_{٢}}$$

$$\text{ص}_{١٢} = \frac{\text{ص}_{٢}}{∂\,\text{س}_{١}} = \frac{∂\left(\frac{∂\,\text{ص}}{∂\,\text{س}_{٢}}\right)}{∂\,\text{س}_{١}} = \frac{∂^{٢}\,\text{ص}}{∂\,\text{س}_{٢} \times ∂\,\text{س}_{١}}$$

$$= \text{ص}_{٢}$$

$$\text{ص}_{٢٢} = \frac{∂^{٢}\,\text{ص}}{∂\,\text{س}_{٢}^{٢}}$$

$$\therefore \frac{د\,\text{ص}_{١}}{د\,ط} = \text{ص}_{١١} \times \frac{د\,\text{س}_{١}}{د\,ط} + \text{ص}_{٢١} \times \frac{د\,\text{س}_{٢}}{د\,ط}$$

$$، \quad \frac{د\,\text{ص}_{٢}}{د\,ط} = \text{ص}_{١٢}\frac{د\,\text{س}_{١}}{د\,ط} + \text{ص}_{٢٢}\frac{د\,\text{س}_{٢}}{د\,ط}$$

ولكن $\frac{د\,\text{ص}}{د\,ط} = \text{ص}_{١}\,ح_{١} + \text{ص}_{٢}\,ح_{٢}$

$\therefore$ بالتفاضل $\frac{د^{٢}\,\text{ص}}{د\,ط^{٢}} = \frac{د\left(\frac{د\,\text{ص}}{د\,ط}\right)}{د\,ط}$

$$= \frac{\text{د}\,(\text{ح}_{1}\,\text{ص}_{1} + \text{س}_{2}\,\text{ص}_{2})}{\text{د}\,\text{ط}} = \frac{\text{د}\,\text{ص}_{1}}{\text{د}\,\text{ط}} = \text{ح}_{1}$$

$$\times \frac{\text{د}\,\text{ص}_{1}}{\text{د}\,\text{ط}} + \text{ح}_{2} \times \frac{\text{د}\,\text{ص}_{2}}{\text{د}\,\text{ط}} .$$

(على أساس أن تغير ط لا يؤدى إلى تغير ح)

ولكن $\frac{\text{د}\,\text{ص}_{1}}{\text{د}\,\text{ط}} = \text{ص}_{11}\,\frac{\text{د}\,\text{س}_{1}}{\text{د}\,\text{ط}} + \text{ص}_{21}\,\frac{\text{د}\,\text{س}_{2}}{\text{د}\,\text{ط}}$

$$= \text{ص}_{11}\,\text{ح}_{1} + \text{ص}_{21}\,\text{ح}_{2}$$

كذلك $\frac{\text{د}\,\text{ص}_{2}}{\text{د}\,\text{ط}} = \text{ح}_{1}\,(\text{ص}_{11}\,\text{ح}_{1} + \text{ص}_{21}\,\text{ح}_{2})$

$$+ \text{ح}_{2}\,(\text{ص}_{12}\,\text{ح}_{1} + \text{ص}_{22}\,\text{ح})$$

∴ الشرط الثانى هو : $\text{ح}_{1}\,\text{ص}_{11}\,\text{ح}_{1} + \text{ح}_{1}\,\text{ص}_{21}\,\text{ح}_{2} + \text{ح}_{2}\,\text{ص}_{12}\,\text{ح}_{1}$
$+ \text{ح}_{2}\,\text{ص}_{22}\,\text{ح}_{2} <$ صفر

حيث ح_{1} ، ح_{2} يحققان العلاقة $\text{ص}_{1}\,\text{ح}_{1} + \text{ص}_{2}\,\text{ح}_{2} =$ صفر

بالمثل لبلوغ نهاية صغرى يجب أن $\text{ح}_{1}\,\text{ص}_{11}\,\text{ح}_{1} + \text{ح}_{1}\,\text{ص}_{21}\,\text{ح}_{2}$
$+ \text{ح}_{2}\,\text{ص}_{12}\,\text{ح}_{1} + \text{ح}_{2}\,\text{ص}_{22}\,\text{ح}_{2} >$ صفر

حيث أن ح_{1} ، ح_{2} تحققان العلاقة $\text{ص}_{1}\,\text{ح}_{1} + \text{ص}_{2}\,\text{ح} =$ صفر

إيجاد النهايات المشروطة :

ص = ($س_١$ ، $س_٢$) نهاية عظمى

بمعلومية وجود علاقة ولتكن الدالة هـ ($س_١$ ، $س_٢$) تربط بين $س_١$ ، $س_٢$

مثلا :

$$ا_١ س_١ + ا_٢ س_٢ + ب = صفر$$

نتيجة تحقق هذا الشرط نجد أن :

$س_٢$ نفسها دالة فى $س_١$

بحيث إذا عرفت $س_١$ عرفت $س_٢$ وبالتالى ص

$$س_٢ = \frac{-ب}{ا_٢} - \frac{ا_١}{ا_٢} س_١$$

$$= ٥ - ٢ س_١$$

ولنفرض $س_١$ = صفر

$$\therefore \quad س_٢ = ٥$$

وعلى ذلك تتحول (ص) إلى داله فى ($س_١$) فقط لأن ($س_١$) تؤثر فى (ص) مباشرة لا عن طريق ($س_٢$) وبذلك لو عوضنا فى الدالة د ($س_١$ ، $س_٢$) عن $س_٢$ بدلالة ($س_١$) لحصلنا على د ($س_١$) ، د ($س_١$).

$$\therefore \quad دالة (س_١) = ص$$

ويمكن حينئذ تطبيق قواعد النهايات العظمى عليها .

مثال :

نفرض دالة ص = س_1^2 + ٢ $\text{س}_1 \text{س}_2$

القيد الخارجى ٣ س_1 + ٢ س_2 — ٣٠ = صفر (شرط)

Side Relation

المطلوب إيجاد النهاية العظمى :

الحل :

مثلا نحول س_2 إلى دالة فى س_1

∴ س_2 = ١٥ — ١ر٥ س_1

∴ الدالة ص = س_1^2 + ٢ س_1 (١٥ — ١ر٥ س_1)

= س_1^2 + ٣ س_1 — ٣ س_1^2

= ٣٠ س_1 — ٢ س_1^2

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}_1}$ = صفر = ٣٠ — ٤ س_1

∴ ٤ س_1 = ٣٠ ، س_1 = ٧ر٥

∴ س_2 = ١٥ — ١ر٥ × ٧ر٥

= ١٥ — ١١ر٥ = ٣ر٧٥

∴ ص نهاية عظمى عندما س_1 = ٧ر٥ ، س_2 = ٣ر٧٥

حل آخر :

$$س_١ = ١٠ - \frac{٢}{٣} س_٢$$

$$ص = (١٠ - \frac{٢}{٣} س)^٢ + ٢ س_١ (١٠ - \frac{٢}{٣} س_٢)$$

توجد $\frac{د ص}{د س_٢}$ ونساويه بالصفر فنحصل على نفس النتيجة .

الحل بطريقة لاجرانج :

المطلوب جعل ص = د (س، ، س) نهاية عظمى بشرط أن
هـ (س، ، س٢) = صفر

ومن الممكن أن نضرب هـ فى أى مقدار موجب أو سالب وليكن ح ثم نطرح النتيجة من ص بدون أن تتأثر ص

بعبارة أخرى ص — $\boxed{ح × هـ (س، ، س،)}$ = ط

ومن الممكن إثبات أننا لو أوجدنا شروط النهاية العظمى للدالة ط مباشرة لحصلنا على نفس النتائج السابقة مع مراعاة إيجاد قيمة ح المناسبة :

مثال :

$$ص = س_١^٢ + ٢ س_١ س_٢$$

$$هـ = ٣ س_١ + ٢ س_٢ - ٣٠ = صفر$$

∴ تكون دالة جديدة مثل $\text{ط} = \text{س}_{1}^{2} + 2\,\text{س}_{1}\text{س}_{2} - \text{ح}\,(3\,\text{س}_{1} + 2\,\text{س}_{2} - 30)$

ونبحث عن النهاية العظمى للدالة ط

∴ يجب مساواة التفاضلين الجزئين ط_{1} ، ط_{2} بالصفر

ولكن $\text{ط}_{1} = (2\,\text{س}_{1} + 2\,\text{س}_{2}) - \text{ح} \times 3 = \text{صفر}$ (١)

، $\text{ط}_{2} = 2\,\text{س}_{1} - 2\,\text{ح} = \text{صفر}$ (٢)

، $\text{هـ} = 3\,\text{س}_{1} + 2\,\text{س}_{2} - 30 = \text{صفر}$ (٣)

بضرب (١) × ٢ ، (٢) × ٣

∴ $-\,2\,\text{س}_{1} + 4\,\text{س}_{2} = \text{صفر}$

$\text{س}_{1} - 2\,\text{س}_{2} = \text{صفر}$

$3\,\text{س}_{1} + 2\,\text{س}_{2} = 30$

$4\,\text{س}_{1} = 30$

∴ $\text{س}_{1} = 7{,}5$

، $\text{س}_{2} = \frac{1}{2}\,\text{س}_{1} = \frac{7{,}5}{2} = 3{,}75$

أى أننا كونا معادلتين $\text{ط} = \text{ص} - \text{ح}\,\text{هـ}$

$= \text{د}\,(\text{س}_{1} ، \text{س}_{2}) - \text{ح}\,\text{هـ}\,(\text{س}_{1} ، \text{س}_{2})$

ثم نساوى التفاضلات الأولى الجزئيه بالصفر .

$$\text{ط}_1 = \frac{\delta\ \text{ط}}{\delta\ \text{س}_1} = \frac{\delta\ \text{ص}}{\delta\ \text{س}_1} - \text{ح}\ \frac{\delta\ \text{ه}}{\delta\ \text{س}_1}$$

$\text{ط}_1 = \text{ص}_1 - \text{ح}\ \text{ه}_1 = \text{صفر}$ بنفس الطريقة (١)

$\therefore \quad \text{ط}_2 = \text{ص}_2 - \text{ح}\ \text{ه}_2 = \text{صفر}$ (٢)

يضاف إلى ذلك نفس الدالة $\text{ه}\ (\text{س}_1 ، \text{س}_2) = \text{صفر}$ (٣)

بصورتها الصفرية .

وبذلك يمكن حل المعادلات الثلاث لإيجاد ح ، س_1 ، س_2 اللازمة. ولكى نتأكد من أن النهاية صغرى أو عظمى نحسب التفاضلات الثانيـــة للدالة ط . ونوجد الشرط الثانى كما سبق بالنسبة للدالة العادية أى أن الشرط اللازم والكافى لنهاية عظمى هو أن :

$$\text{ع}_1 \text{ط}_{11} \text{ع}_1 + \text{ع}_1 \text{ط}_{21} \text{ع}_2 + \text{ع}_2 \text{ط}_{22} \text{ع}_1 + \text{ع}_2 \text{ط}_{22} \text{ع}_2 > \text{صفر}$$

حيث :

$$\text{ع}_1 \text{ط}_1 + \text{ع}_2 \text{ط}_2 = \text{صفر}$$

أى أن :

$$\text{ع}_1 \text{ص}_1 + \text{ع}_2 \text{ص}_2 = \text{صفر}$$

نظراً لأن :

$$\text{ط}_1 = \text{ص}_1 + \text{صفر} \ ، \ \text{ط}_2 = \text{ص}_2 + \text{صفر}$$

وأما بالنسبه للنهاية الصغرى فإننا نتبع نفس الطريقة مع تغيير إشارة المتباينة الأخيرة .

وإذا رمزنا إلى التفاضلات الأولى لدالة الإشباع ف بالرموز $ف_{١}$ ، $ف_{٢}$ والتفاضلات الثانية بالرموز $ف_{١١}$ ، $ف_{١٢}$ ، $ف_{٢}^{٢}$ ، $ف_{٢٢}$ نجد أن حساب نقطة أقصى إشباع يتم كالآتى :

أولا : نكون الدالة :

$$ط = ف\,(س_{١} ، س_{٢}) - ح\,(ع_{١}س_{١} + ع_{٢}س_{٢} - ى)$$

وتحقق النهاية العظمى بشرط أن :

شروط النهاية العظمى

$$\left.\begin{array}{ll} ط_{١} = ف_{١} - ح\,ع_{١} & = صفر \\ ط_{٢} = ف_{٢} - ح\,ع_{٢} & = صفر \\ هـ = ع_{١}س_{١} + ع_{٢}س_{٢} - ى & = صفر \end{array}\right] \quad (١)$$

∴ من المعادلتين الأوليتين :

$$\frac{ف_{١}}{ع_{١}} = \frac{ف_{٢}}{ع_{٢}} = ح \quad (٢)$$

أى أن النهاية العظمى تتحقق عندما تحقق $س_{١}$ ، $س_{٢}$ العلاقتين الآتيتين :

$$\left.\begin{array}{l} ع_{٢}ف_{١} - ع_{١}ف_{٢} = صفر \\ ع_{١}س_{١} + ع_{٢}س_{٢} = ى \end{array}\right] \quad (٣)$$

$$∴ \quad ف_{١} = \frac{\delta\, ف}{\delta\, س_{١}} = \text{المنفعة الحدية للسلعة } س_{١}$$

$$، \quad ف_{٢} = \frac{\delta\, ف}{\delta\, س_{٢}} = \text{المنفعة الحدية للسلعة } س_{٢}$$

∴ عند نقطة التوازن فإن النسبة بين منفعة السلعة الأولى إلى سعرها
= نسبة منفعة السلعة الثانية إلى سعرها .

وإذا $ح$ تمثل المنفعة الحدية للنقود (+) .

ويتضح إذا أن نقطة التوازن للمستهلك تتحدد عندما تتناسب المنافع الحدية للسلع التي يستهلكها المستهلك مع الأسعار الخاصة بهذه السلع كما يحددها السوق الخارجي (سوق الاستهلاك) .

وهذا وفقا للمعادلة (٢) كذلك ، نجد من هذه المعادلة أن المقدار $ح$ الذي استخدمناه كمعامل لاجرانج الرياضي اللازم لإيجاد النهاية العظمى المشروطة إنما هو في الواقع إلا المنفعة الحدية للنقود أو الدخل وواضح من المعادلة (٢) أن كلا من $ف_1$ ، $ف_2$ مقادير موجبة عند التوازن .

<u>مثال :</u>

إذا كانت دالة الاشباع $ف(س_1 ، س_2) = ١ + س_1 س_2^2$.

، $ع_1 = ١$ ، $ع_2 = ٤$ ، $ق = ٢$.

المطلوب إيجاد نقطة التوازن .

<u>الحل :</u>

لكي يتحقق التوازن يجب أن $س_1$ ، $س_2$ تحققان المعادلتين :

$$\frac{ف_1}{ع_1} = \frac{ف_2}{ع_2} \quad \text{أى} \quad ف_1 ع_2 = ف_2 ع_1 \qquad (١)$$

$$س_1 ع_1 + س_2 ع_2 = ق \qquad (٢)$$

كذلك نوجد $ف_1 = \frac{\delta ق}{\delta س_1} = س_2^{2}$

$$ف_2 = ٢ س_1 س_2$$

$$\therefore ٤ س_2^{2} = ٢ س_1 س_2$$

$$\therefore ٢ س_2 = س_1$$

بالتعويض فى المعادلة الثانية .

$$س_1 + ٤ \tfrac{1}{2} س_1 = ٢٠ .$$

$$\therefore ٣ س_1 = ٢٠ \quad \text{أو} \quad س_1 = \frac{٢٠}{٣}$$

$$، س_2 = \tfrac{1}{2} س_1 \quad \text{أو} \quad س_2 = \frac{١٠}{٣}$$

تماس منحنى السواء مع خط السعر :

وجدنا فى التحليل السابق شروط التوازن على أساس عام ، ومن المعروف

أن هذه الشروط يجب أن تناظر الشرط الخاص بتماس منحنى السواء مع خط السعر (الميزانية) عند نقطة التوازن ولاثبات هذا الشرط توجد ميل كل من منحنى السواء وخط السعر كالآتى :

أولا : معادلة منحنى السواء هى ف ($س_١$ ، $س_٢$) = مقدار ثابت .

معادلة خط السعر $ع_١ س_١ + ع_٢ س_٢ = ق$

أو $س_٢ = \frac{ق}{ع_٢} - \frac{ع_١}{ع_٢} س_١$

فلو فرضنا أن لدينا دالة ضمنية فى $س_١$ ، $س_٢$ مثل هـ ($س_١$ ، $س_٢$) وأوجدنا التفاضلات الأولى لها وهى $هـ_١$ ، $هـ_٢$. فإننا نستطيع أن نستخدم هذه التفاضلات فى إيجاد معدل تغير $س_٢$ بالنسبة إلى $س_١$ الذى تعينه الدالة هـ . ذلك لأنه بوضع الدالة هـ ($س_١$ $س_٢$) = صفر . أى فى صورتها الصفرية نجد أن التفاضل الكلى بالنسبة إلى س هو :

$$\frac{د هـ}{د س_١} = هـ_١ + هـ_٢ \times \frac{د س_٢}{د س_١} = صفر$$

$$إذا \quad \frac{د س_٢}{د س_١} = - \frac{هـ_١}{هـ_٢}$$

وبتطبيق هذه القاعدة على منحنى السواء نجد ان ميله هو فى الواقع

$$\frac{د س_٢}{د س_١} = - \frac{ف_١}{ف_٢} \quad (١) \text{ ميل منحنى السواء}$$

وبالنسبة لمعادلة خط السعر نجد أن :

$$ه_{1} = \frac{\delta(ع_{1} س_{1} + ع_{2} س_{2} - ف)}{\delta س_{1}} = ع_{1}$$

وبالمثل $ه_{2} = ع_{2}$

$$\therefore \quad \frac{د س_{2}}{د س_{1}} = \frac{-ع_{1}}{ع_{2}}$$

ولكن بالرجوع إلى شروط التوازن نجد أن :

$$\frac{ف_{1}}{ف_{2}} = \frac{ع_{1}}{ع_{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{-ف}{ف_{2}} = \frac{-ع_{1}}{ع_{2}}$$

ومعنى ذلك أن ميل كل من منحنى السواء وخط السعر عند نقطة التوازن متساويين وهذا هو انطلوب .

هذه النتائج التى توصلنا إليها الآن يمكن تعميمها من الناحية التحليلية على أكثر من سلعتين ولو أن هذا متعذر باستخدام التحليل الهندسى .

تحدب منحنى السواء :

لم نحاول حتى الآن أن نفترض فى منحنى السواء أكثر من أنها منحنيات متصلة وسالبة الميل . غير أنه من الممكن أن توجد لها صفات أخرى بناء على شروط التوازن . وأول هذه الصفات هى صفة التحدب بالنسبة لنقطة الأصل . ويقال أن المنحنى محدب بالنسبة لنقطة الأصل . إذا كان ميله يتزايد جبريا ، أى يتناقص عدديا فى حالة الميل السالب أو بعبارة أخرى لابد أن يكون التفاضل

$$\frac{\partial^2 \text{س}_2}{\partial \text{س}_1^2} = \text{مقدار موجب}$$

ولإثبات ذلك نبدأ بإيجاد التفاضل الأول . ولقد سبق أن رأينا أنه هو .

$$\frac{\text{د س}_2}{\text{د س}_1} = \left(\frac{-\text{ف}_1}{\text{ف}_2} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{\text{د}^2\text{س}_2}{\text{د س}_1} = \frac{\text{د}}{\text{د س}_1} \left(- \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} \right)$$

$$= - \left(\frac{1}{\text{ف}_2^2} \times \text{ف}_2 \left(\frac{\partial \text{ف}_1}{\partial \text{س}_1} + \frac{\partial \text{ف}_1}{\partial \text{س}_2} \cdot \frac{\text{د س}_2}{\text{د س}_1} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\text{ف}_{12}} \times \text{ف}_1 \left(\frac{\partial \text{ف}_2}{\partial \text{س}_1} + \frac{\partial \text{ف}_2}{\partial \text{س}_2} \times \frac{\text{د س}_2}{\text{د س}_1} \right) \right)$$

$$= - \left(\frac{1}{\text{ف}_2} \left(\text{ف}_{11} + \text{ف}_{.2} \left\{ - - \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} \right\} \right) \right)$$

$$- \frac{ف_{١}}{ف_{٢}^{٢}} \left(ف_{١٢} + ف_{٢٢} \left\{ - \frac{ف_{١}}{ف_{٢}} \right\} \right) \Big)$$

$$= - \Big[\frac{١}{ف_{٢}} ف_{١١} - \frac{ف_{١}}{ف_{٢}^{٢}} ف_{١١} - \frac{ف_{١}}{ف_{٢}^{٢}} ف_{١٢}$$

$$+ \frac{ف_{١}^{٢}}{ف_{٢}^{٣}} ف_{٢٢} \Big]$$

$$= - \frac{١}{ف_{٢}^{٣}} \Big[ف_{٢}^{٢} ف_{١١} - ف_{١} ف_{٢} ف_{٢١} - ف_{١} ف_{٢} ف_{١٢}$$

$$+ ف^{١} ف_{٢٢} \Big]$$

ولـكى نثبت أن ميل منحنى السواء متزايد نلاحظ أن $ف_{٢}$ مقـدار موجب باعتبار أنها منفعة حدية . وبالتالى فإن مكعبها موجب . ويكون العامل المضروب فى القوس $\left(- \frac{١}{ف_{٢}^{٣}} \right)$ مقـدار سالب أى أن القوس لا بد وأن يكون سالباً . ولاثبات أنه فعلا كذلك نلاحظ أننا بوضع :

$ف_{٢} = ح_{١}$ ، $ف_{١} = - ح_{٢}$ نحصل على مقدار يشابه للقدار الذى اشترطنا أن يكون سالبا لـكى تتحقق النهاية العظمى .

$$\therefore ح_{١}^{٢} ف_{١١} + ح_{١} ح_{٢} ف_{٢١} + ح_{٢} ح_{١} ف_{١٢} + ح_{٢}^{٢} ف_{٢٢} < صفر$$

$$ف_{٢}^{٢} ف_{١١} - ف_{٢} ف_{١} ف_{٢١} - ف_{١} ف_{٢} ف_{١٢} + ف_{١}^{٢} ف_{٢٢} < صفر$$

لأن هذا أن الشرط الثانى للنهاية العظمى قد أثبت لنا أن منحنى السواء يجب أن يكون محدبا لـكى تكون النهاية التى وصلنا إليهـا نهاية عظمى وليست نهاية

صغرى لأنه لو كان المنحنى محدبا بالنسبة لاتجاه الشمال الشرقى لكان معنى ذلك أن ميله يتناقص مع تزايد $س_١$ وبالتالى فإن المقدار بين القوسين يكون موجب وهذا يعنى أن الشرط الثانى هو شرط نهاية صغرى وليس شرط نهاية عظمى .

دليل الاشباع أو المنفعة Utilfty Index

استخدمنا حتى الآن الدالة « ف » كما لو كانت دالة وحيدة القيمة ومحددة بالنسبة للمستهلك مما يحمل على الاعتقاد أن نظرية المستهلك تتطلب قياس الاشباعات . والواقع أن هذا الشرط غير صحيح لأنه من الممكن إثبات أن أى دالة أخرى مماثلة للدالة «ف» بحيث تزيد وتنقص معها يمكن أن تعطى نفس النتيجة، أى نفس نقطة التوازن . ومعنى هذا أننا لانتطلب قياس الاشباعات وإنما يكفينا مجرد ترتيبها . أى نستطيع أن نقول أنه لو وجدت داله مثل « ط » $(س_١، س_٢)$ مرتبطة بالدالة « ف » أى أنها دالة فى « ف » أو « ط » (ف) وكانت هذه الدالة دالة متزايدة فى « ف » أى أن $\frac{د\,ط}{د\,ف} >$ صفر . فى هذه الحالة نجد ن نقطة التوازن تبقى على حالها .

وذلك كالآتى :

شرط التوازن باستخدام الدالة « ف » هو :

$$\frac{ف_١}{ع_١} = \frac{ف_٢}{ع_٢} \quad ، \quad ع_١ س_١ + ع_٢ س_٢ = ف$$

وشرط التوازن باستخدام الدالة « ط » هو :

$$\frac{\text{ط}_1}{\text{ع}_1} = \frac{\text{ط}_2}{\text{ع}_2} \text{ ، } \text{ع}_1\text{س}_1 + \text{ع}_2\text{س}_2 = \text{ف}$$

ولكن $\text{ط}_1 = \frac{\delta\, \text{ط}}{\delta\, \text{س}_1} = \text{م} \times \frac{\delta\, \text{ف}}{\delta\, \text{س}_1} = \text{م} \times \text{ف}_1$ مثلا

حيث « م » مقدار ثابت يتوقف على قيمة « ف »

وبالمثل $\text{ط}_2 = \text{م} \times \text{ف}_2$

$$\therefore \frac{\text{ط}_1}{\text{ع}_1} = \frac{\text{م}\,\text{ف}_1}{\text{ع}_1} \text{ ، } \frac{\text{ط}_2}{\text{ع}_2} = \frac{\text{م}\,\text{ف}_2}{\text{ع}_2}$$

أى أن الشرط اللازم للتوازن هو :

$$\frac{\text{م}\,\text{ف}_1}{\text{ع}_1} = \frac{\text{م}\,\text{ف}_2}{\text{ع}_2} \text{ أى}$$

$$\frac{\text{ف}_1}{\text{ع}_1} = \frac{\text{ف}_2}{\text{ع}_2} \text{ كما فى الحالة الأصلية}$$

وبذلك يمكن أن نحصل على نفس نقطة التوازن (س_1 ، س_2) ولكن الذى يختلف هو المقدار « ح » الذى يمثل المنفعة الحديةللنقود نظراً لأن المنفعة تكون مقدرة بالوحدات الاعتبارية التى بنيت عليها الدالة « ف » . ومن الممكن أيضاً استخدام هذه القاعدة فى تبسيط بعض الدوال عند إجراء تحليل رياضى عليها

طالما أننا نراعي نفس القاعدة السابقة، وهي أن يكون معدل تغير الدالة الجديدة بالنسبة للدالة الأصلية موجب .

تمارين :

(١) إذا كانت دالة الاشباع بالنسبة لمستهلك معين هي :

$ف = ١٢ س_١^٢ - ٥ س_١ س_٢ + ٥ س_٢^٢$ حيث $س_١$ ، $س_٢$ هي الـكميتان اللتين يستهلكهما المستهلك من سلعتين معينتين ، فأوجد نقطة توازن هذا المستهلك علماً بأن :

دخله ق = ٢٥٢

والأسعار هي $ع_١$ ، $ع_٢$ = ٦ ، ٥ على الترتيب .

ثم أحسب المنفعة الحدية للنقود عند التوازن .

(٢) إذا علمت أن دالة التفضيل بالنسبة لمستهلك يتعامل في سلعتين $س_١$ ، $س_٢$ هي ف = هـ ص حيث :

$ص = أ س_١ س_٢ + ب س_٢ + حـ س_٢^٢$

حيث أ ، ب ، حـ ثوابت ، هـ هي المتسلسلة الأسية ، فأثبت أنه إذا تحدد السعران $ع_١$ ، $ع_٢$ ودخل المستهلك ق فسوف تبقى نقطة التوازن ثابتة لو اعتبرنا أن دالة التفضيل ص بدلا من ف .

استنتج نقطة التوازن عندما أ = ١٠ ، ب = ٢٠

، حـ = ٣ ، $ع_١$ = ١٠ ، $ع_٢$ = ١٢

، ق = ٨٨٠

التوازن الاستاتيكى المقارن للمستهلك

COLPARBTIVE STATICS

ننتقل من دراسة طريقة تعيين نقطة التوازن بناء على معلومات معينة تتوفر لدى المستهلك إلى دراسة التغير الذى يطرأ على هذه النقطة بناءاً على تغير معلوم ووحيد فى المعلومات .. أو البيانات . وهذا يؤدى بنا إلى دراسة نقط توازن جديدة مترتبة على تغير البيانات أى أنها تهتم بموضوع التوازن الجديد بالنسبة التوازن القديم ـ هل هو أعلى منه أم يساويه أم أقل منه ؟

وندخل هذه الدراسة تحت دراسة التوازن الاستاتيكى المقارن . أى التى تتم فيه المقارنة بين نقطتين (نقطتى توازن) استاتيكيتين .

وكما رأينا فإن المعلومات التى افترضنا ثباتها فيما سبق تتعلق بالأسعار وبالدخل وعلى ذلك فإن المهم أن نعرف ماذا كان تغير أحد السعرين أو الدخل يؤدى إلى زيادة الكمية التى يحصل المستهلك عليها من سلعة معينة أو نقصها أو ثباتها فى نقطة التوازن الجديدة بالنسبة للنقطة الأصلية .

ومن الممكن أن نعبر عن نتائج التحليل الاستاتيكى السابقة بصورة رياضية أخرى فنقول أنه : لكى تتحدد نقطة التوازن . يجب حل المعادلتين :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ف}_1\text{ع}_2 - \text{ف}_2\text{ع}_1 = \text{صفر} \\ \text{ع}_1\text{س}_1 + \text{ع}_2\text{س}_2 - \text{ق} = \text{صفر} \end{array}\right\} \quad (1)$$

ويترتب على حل هاتين المعادلتين معا الحصول على قيم لكل من $س_1$ ، $س_2$ متوقفة على حجم كل من المتغيرات $ع_1$ ، $ع_2$ ، ف

أى أن الحل يمكن التعبير عنه كالآتى :

$$\left.\begin{array}{l} س_1 = د_1(ع_1 ، ع_2 ؛ ف) \\ = د_2(ع_1 ، ع_2 ؛ ف) \end{array}\right\} \quad (٢)$$

هاتين الدالتان يران دالتين الطلب على كل من $س_1$ ، $س_2$ وقد ظهر مما سبق أن تغير $ع_1$ أو $ع_2$ أو ف سوف يؤدى إلى تغير س ، $س_2$. ولذلك تظهر دوال الطلب كدوال فى $ع_1$ ؛ $ع_2$ ؛ ف .

ويتضح من المعادلات (٢) أن دوال الطلب المستمدة من التحليل السابق تتوقف على سعرى السلعتين وعلى الدخل وليس على سعر واحد فقط كما فى تحليل مارشال المعروف . ولكى تعرف اتجاهات التغير فى كل من $س_1$ ، $س_2$ بناء عن التغير $ع_1$ ؛ $ع_2$ ؛ ف يمكن أن نعتبر أننا بصدد حساب المعامل التفاضلى لكل من الدالتين فى (٢) .. وبذلك نستنتج مباشرة معدل تغير $س_1$ مع تغير $ع_1$ أو $ع_2$ أو ق وبالمثل بالنسبة لـ $س_2$.

فباستخدام الدالتين (٢) نستطيع مباشرة حساب معدلات التغير المطلوبة . غير أن هذا يتطلب منا :

أولا :

معرفة شكل الدالة (ف) حتى يمكن التعويض عنها ومعرفة الصورة الصريحة

الدالتين $د_1$ ، $د_2$. ولكن تحديد دالة معينة (ف) يؤدى إلى ارتباط النتائج بالشكل الذى افترضناه لهذه الدالة وبذلك تفقد النتائج صورة صفة التعميم .

وقد اتضح من البحث الرياضى أنه فى الأمكان إجراء التحليل على المعادلتين (١) للوصول إلى نفس النتائج التى يمكن الوصول إليها من المعادلتين (٢) وبذلك يمكننا أن نتغاضى عن ضرورة تعيين الشكل الفعلى لدوال الطلب على الأقل فى مرحلة التحليل العام .

ولنبدأ الآن بدراسة :

أثر تغير البيانات

مبتدئين بالحالة التى يحدث فيها تغير مناسب فى جميع البيانات .

<u>الحالة الأولى :</u>

تغير ق ، $ع_1$ ، $ع_2$ بنفس النسبة .

ومن الممكن أن نميز بين حالتين : الأولى تظهر فيها نقطة التوازن على حالها وهذا يفترض عدم وجود حساسية أو خط لدى المستهلك بالنسبة لتغيرات النقود والأسعار .

<u>أما الحالة الثانية :</u>

ففيها يتأثر المستهلكون بحدوث هذه التغيرات حتى ولو كانت متناسبة ،

وهذا فرض يلجأ إليه الكثير من الكتاب مثل كينز ود بوزنبرى . ويكون من الممكن اثبات أن الطريقة التى اتبعناها حتى الآن نفترض ضمنا تحقق الحالة الأولى .

ويمكن اثبات ذلك كالآتى : على أساس أن دالة الاشباع هى :

$\text{ف} = \text{د} (\text{س}_1 ، \text{س}_2)$ دالة مستقلة عن الأسعار $\text{ع}_1 ، \text{ع}_2$

وعن الدخل ق . نجد أن كلا من ف_1 ، ف_2 لا تتأثر بتغيرات $\text{ع}_1 ، \text{ع}_2 ، \text{ق}$

ولنفرض الآن حدوث تغيرات فى هذه البيانات بحيث أصبحت الأسعار الجديدة هى :

$$\bar{\text{ع}}_1 = \text{م ع}_1$$

$$\bar{\text{ع}}_2 = \text{م ع}_2$$

$$\bar{\text{ق}} = \text{م ق}$$

حيث م عدد موجب يدل على عدد المرات التى ضوعفت فيها الأسعار والدخل .

∴ يمكننا تحديد نقطة التوازن الأصلية بحل المعادلتين (١) أما بالنسبة لنقطة التوازن الجديدة فإننا نحتاج إلى حل المعادلتين المماثلتين الآتيتين :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ف}_1 \text{ع}_1 - \text{ف}_2 \bar{\text{ع}}_1 = \text{صفر} \\ \bar{\text{ع}}_1 \text{س}_1 + \bar{\text{ع}}_2 \text{س}_2 = \bar{\text{ق}} \end{array}\right\} \quad (1)$$

وباستخدام العلاقات السابقة تجد أن هاتين المعادلتين معناها أن :

$$\text{ف}_1 \times \text{م}\,\text{ع}_2 - \text{ف}_2 \times \text{م}\,\text{ع}_1 = \text{صفر}$$

$$\text{م}\,\text{ع}_1\,\text{س} + \text{م}\,\text{ع}_2\,\text{س}_2 = \text{م}\,\text{ق}$$

وواضح أنه من الممكن اختصار م من كلتا المعادلتين لتحصل على :

$$\left.\begin{array}{l} \text{ف}_1\,\text{ع}_2 - \text{ف}_2\,\text{ع}_1 = \text{صفر} \\ \text{ع}_1\,\text{س}_1 + \text{ع}_2\,\text{س}_2 = \text{ق} \end{array}\right\} \quad (1)$$

وهى نفس المعادلة (١)

∴ لا بد عند حل المعادلتين الجديدتين (١) من الوصول إلى نفس نقطة التوازن الأصلية .

ومعنى هذا بالنسبة لدالتى الطلب (٢) أن هاتين الدالتين متجانستين من الدرجة الصفرية فى ق ، ع_1 ، ع_2 .

وهذا يثبت أن بعض معادلات الطلب الشائعة الاستخدام خاصة فى التحليل الاحصائى ليست متفقة تماما مع النظرية لأن هذه المعادلات كثيراً ما تفترض صورة خطية مثلا :

$$\text{س}_1 = \text{أ} + \text{ب}_1\,\text{ع}_1 - \text{ب}_2\,\text{ع}_2 + \text{ب}_3\,\text{ق}$$

حيث أ ، $ب_١$ ، $ب_٢$ ، $ب_٣$ ثوابت

وواضح أن هذه المعادلة لا تحقق بالضرورة شرط التجانس الذى أشرنا إليه إلا إذا كان الحد المطلق أ = صفر وكانت هناك علاقة بين $ب_١$ ، $ب_٢$ ، $ب_٣$ تضمن عدم تغير $س_١$ نتيجة تغير متناسب فى البيانات .

الحالة الثانية:

حساب أثر تغيرات الدخل مع ثبات السعرين

لنفرض الآن أننا غيرنا الدخل ق مع ثبات كل من السعرين $ع_1$ ، $ع_2$. في هذه الحالة يهمنا إيجاد معدلات التغير في كل من $س_1$ ، $س_2$ وبالتالي ح حيث ح هي المنفعة الحدية للنقود . ولكي نحسب هذه المعادلات نوجد التفاضلات الجزئية بالنسبة إلى ق ، أي :

$$\frac{\partial س_1}{\partial ق} ، \frac{\partial س_2}{\partial ق} ، \frac{\partial ح}{\partial ق}$$

ومن الممكن كما ذكرنا من قبل أن نجرى هذه العملية عن طريق استخدام المعادلات التي استنتجناها كشرط لازم للتوازن وهي المعادلات الآتية :

$$\left.\begin{array}{l} ف_1 - ح ع_1 = صفر \\ ف_2 - ح ع_2 = صفر \\ ع_1 س_1 + ع_2 س_2 = ق \end{array}\right\} (1)$$

ولكي نوجد التفاضل بالنسبة إلى ق نلاحظ أولا أن كلا من $س_1$ ، $س_2$ ، ح دوال في ق وبالتالي فإن :

ف ، $ف_1$ ، $ف_2$ دوال في ق

٠. نستطيع القول أن ف_{1} مثلا دالة فى ق عن طريق س_{1} ، س_{2} ولإيجاد تفاضلهما بالنسبة إلى ق نحسب مجموع تأثيره س_{1} ، س_{2} الناشئين عن تغيرهما بسبب تغير ق فنجد أن :

$$\frac{\delta\, \text{ف}_{1}}{\delta\, \text{ق}} = \frac{\delta\, \text{ف}_{1}}{\delta\, \text{س}_{1}} \times \frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ق}} + \frac{\delta\, \text{ف}_{1}}{\delta\, \text{س}_{2}} \times \frac{\delta\, \text{س}_{2}}{\delta\, \text{ق}}$$

$$= \text{ف}_{11} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ق}} \right) + \text{ف}_{21} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{2}}{\delta\, \text{ق}} \right)$$

حيث ف_{11} ، ف_{21} ترمز إلى التفاضلات الجزئية كما سبق الإشارة . وبالمثل

ونجد أن $\frac{\delta\, \text{ف}_{2}}{\delta\, \text{ق}} = \text{ف}_{12} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ق}} \right) + \text{ف}_{22} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{2}}{\delta\, \text{ف}} \right)$

وعلى هذا الأساس نستطيع مفاضلة المعادلات (١) بالنسبة إلى ق لتحصل على ما يأتى :

$$\text{ف}_{11} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ف}} \right) + \text{ف}_{22} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{2}}{\delta\, \text{ف}} \right) - \text{ع}_{2} \left(\frac{\delta\, \text{ح}}{\delta\, \text{ق}} \right) = \text{صفر}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{ف}_{12} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ق}} \right) + \text{ف}_{22} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{2}}{\delta\, \text{ق}} \right) - \text{ع}_{2} \left(\frac{\delta\, \text{ح}}{\delta\, \text{ق}} \right) \\ &= \text{صفر} \\ &\text{ع}_{1} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ق}} \right) + \text{ع}_{2} \left(\frac{\delta\, \text{س}_{2}}{\delta\, \text{ق}} \right) = 1 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

وعلى هذا الأساس يكون قد حسبنا ثلاثة معادلات فى معدلات التغير المطلوبة

وهى $\frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ق}}$ ، $\frac{\delta\, \text{س}_{2}}{\delta\, \text{ق}}$ ، $\frac{\delta\, \text{ح}}{\delta\, \text{ق}}$

وبحل هذه المعادلات الثلاث معا نجد أننا نستطيع التعبير عن كل من هذه المعادلات فى شكل دوال صريحة فى المقادير الأخرى التى ظهرت فى المعادلات السابقة .

لحل المعادلات (٢) نوجد محدد المقام وهو :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{ف}_{11} & \text{ف}_{11} & -\text{ع}_{1} \\ \text{ف}_{12} & \text{ف}_{22} & -_{2} \\ \text{ع}_{1} & \text{ع}_{2} & \text{صفر} \end{vmatrix} \qquad (٣)$$

أما محددات البسط فتتوقف على كل واحد من المعدلات المطلوبة .

فمثلا نجد أن

$$\frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ق}} = \frac{1}{\Delta} \times \begin{vmatrix} \text{صفر} & \text{ف}_{21} & -\text{ع}_{1} \\ \text{صفر} & \text{ف}_{22} & - \\ 1 & \text{ع}_{2} & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left(-\text{ف}_{21}\,\text{ع}_{2} \times \text{ف}_{22}\,\text{ع}_{1} \right)$$

$$\therefore \frac{\delta\, \text{س}_{1}}{\delta\, \text{ق}} = \frac{\text{ف}_{22}\,\text{ع}_{1} - \text{ف}_{21}\,\text{ع}_{2}}{\Delta} \qquad (٤)$$

وبالمثل نجد أن $\frac{\delta \text{س}_{3}}{\delta \text{ق}} = \frac{1}{\text{ﻫ}} \begin{vmatrix} \text{ف}_{11} & \text{صفر} & -\text{ع}_{1} \\ \text{ف}_{12} & \text{صفر} & -\text{ع}_{2} \\ \text{ع}_{1} & 1 & \text{صفر} \end{vmatrix}$

$$\frac{1}{\text{ﻫ}} \times (-1)(-\text{ع}_{2}\text{ف}_{11} + \text{ع}_{1}\text{ف}_{12})$$

$$\therefore \quad \frac{\delta \text{س}_{3}}{\delta \text{ق}} = \frac{\text{ف}_{11}\text{ع}_{2} - \text{ف}_{12}\text{ع}_{1}}{\text{ﻫ}} \qquad (5)$$

وأخيراً فإن $\frac{\delta \text{ح}}{\delta \text{ف}} = \frac{\text{ف}_{11}\text{ف}_{22} - \text{ف}^{2}_{21}}{} \qquad (6)$

وعلى ذلك نستطيع أن نعين معدلات التغير المطلوبة لو أمكن تعيين الدالة (ف) وبالتالي بحساب تفاضلاتها الثانية . أما في الحالة العامة التي نجهل فيها هذه الدالة فإننا نستطيع أن نتوقع أن تكون اشارة كل من :

$\frac{\delta \text{س}_{1}}{\delta \text{ق}}$ ، $\frac{\delta \text{س}_{2}}{\delta \text{ق}}$ موجبة إلا في الحالات التي تكون فيها إحدى السلعتين رديئة بحيث ينقص استهلاكها كلما زاد الدخل . ويتضح هذا التأثير من العلاقة بين التفاضلات الثانية كما تظهر في المعادلات (٤) ، (٥) .

لذلك نجد أنه على ضوء التحليل النظري فقط لا يمكن الجزم بشيء فيما يخص بمعدلات التغير بالنسبة للدخل . ولا بد للوصول إلى مثل هذا القرار من معرفة الشكل الفعلي لدوال الاشباع .

تمارين :

(١) بفرض أن دالة الاشباع هى :

$$ف = س_1 + س_2 + \sqrt{2 س_1 س_2}$$

أثبت أن معادلة الطلب على السلعة الأولى هى :

$$2 ع_1 \sqrt{ع_2 س_1} - (ع_2 - ع_1) \sqrt{2 س_1} \quad \sqrt{ق - ع_1 س_1}$$

$$- ق \bar{ع}_1 = صفر$$

(٢) مستهلك ينفق دخله ق = ١٠٠ على ثلاث سلع أسعارها هى :

$$ع_1 = 1 ، ع_2 = 2 ، ع_3 = 4$$

ودالة الاشباع لهذا المستهلك هى :

$$ف = 1 + س_1 س_2 + 2 س_1 س_3 + 4 س_2 س_3$$

أوجد الميزانية التوازنية لهذا المستهلك .

(٣) إذا كان دليل الاشباع هو :

$$ف = أ_1 س_1^2 + أ_2 س_2^2 + ب_1 س_1 + ب_2 س_2 + ح$$

فأوجد العلاقة بين الطلب على هاتين السلعتين باعتبار أن $ع_1$ ، $ع_2$ هما سعر

السوق لها . ثم أوجد الطلب $س_١$ ، $س_٢$ على السلعتين بدلالة الدخل ق والأسعار $ع_١$ ، $ع_٢$.

(٤) بمعلومية دالة الاشباع .

$ف = أ + س_١^٢ س_٢$ حيث أ مقدار ثابت

أوجد معادلتى الطلب على السلعتين ، واستنتج منهما معدلى التغير بالنسبة للدخل ق ثم قارن الناتج بما تحصل عليه تطبيق القاعدة العامة .

(٥) بمعلومية دالة المنفعة $ف = س_٣ (س_١ س_٢ + س_٢)$

أوجد معادلات الطلب على السلع بدلالة الدخل والأسعار ثم أوجد معدل التغير لكل سلعة بالنسبة للدخل . أوجد كذلك المنفعة الحدية للنقود .

ثالثاً :

دراسة أثر تغير سعر إحدى السلعتين

لنفرض أن سعر السلعة الأولى ع_1 قد تغير مع ثبات ع_2 ، ق فى هـذه الحالة يترتب على تغير ع_1 فى نقطة التوازن أى فى قيم س_2 وبالتالى حـ ولكى نبحث عن اتجاه هذا التغير وتحدد حجمه لا بد لنا من قياس معدلات التغير :

$$\left(\frac{\delta \text{س}_1}{\delta \text{ع}_1}\right) ، \left(\frac{\delta \text{س}_2}{\delta \text{ع}_1}\right) ، \left(\frac{\delta \text{حـ}}{\delta \text{ع}_1}\right)$$

وكما فى حالة قياس أثر تغير الدخل نجد أنه من الممكن (لو علمت دوال الطلب) أن نحسب هذه المعدلات مباشرة . فلو كانت ، مثلا ، دالة الطلب على السلعة الأولى هى:

$$\text{س}_1 = \text{د}_1 (\text{ع}_1 ، \text{ع}_2 ، \text{ق})$$

فإن معدل تغير الكمية س_1 بالنسبة للسلعة ع_1 هو :

$$\frac{\delta \text{س}_1}{\delta \text{س}_1} = \frac{\delta \text{د}_1}{\delta \text{ع}_1}$$

ولكن معرفة منحنى دالة الطلب تتطلب حل الشروط اللازمة التوازن .وهذا

يقتضى معرفتنا للدالة ف ومشتقاتها . لذلك نفضل إجراء عملية التفاضل قبل حل شروط التوازن كما فعلنا بالنسبة لأثر تغيرات الدخل . ويكون الحل كالآتى :

شروط التوازن هى :

$$\begin{cases} \text{ف}_1 - \text{ح}\,\text{ع}_1 = \text{صفر} \\ \text{ف}_2 - \text{ح}\,\text{ع}_2 = \text{صفر} \\ \text{ع}_1\text{س}_1 + \text{ع}_2\text{س}_2 = \text{ق} \end{cases}$$

ونفاضل كل من هذه المعادلات الثلاث بالنسبة إلى ع_1

ونلاحظ أن :

$$\frac{\delta \text{ف}_1}{\delta \text{ع}_1} = \text{ف}_{11}\left(\frac{\delta \text{س}_1}{\delta \text{ع}_1}\right) + \text{ف}_{21}\left(\frac{\delta \text{س}_2}{\delta \text{ع}_1}\right)$$

$$\text{،}\quad \frac{\delta\, \text{ح}\,\text{ع}_1}{\delta \text{ع}_1} = \text{ح} + \text{ع}_1\left(\frac{\delta \text{ح}}{\delta \text{ع}_1}\right)$$

$$\frac{\delta\, \text{ع}_1\text{س}_1}{\delta \text{ع}_1} = \text{ع}_1\left(\frac{\delta \text{س}_1}{\delta \text{ع}_2}\right) + \text{س}_1$$ (تفاضل حاصل الضربية)

نجد أن المعادلات الثلاث التى يجب حلها لتقدير معدلات التغير المطلوبة هى :

$$\text{ف}_{11}\left(\frac{\delta \text{س}_1}{\delta \text{ع}_1}\right)+\text{ف}_{21}\left(\frac{\delta \text{س}_2}{\delta \text{ع}_1}\right)-\text{ع}_1\,\frac{\delta \text{ح}}{\delta \text{ع}}=-\text{ح}$$

$$\text{ف}_{12}\left(\frac{\delta \text{س}_1}{\delta \text{ع}_1}\right)+\text{ف}_{22}\left(\frac{\delta \text{س}_2}{\delta \text{ع}_1}\right)-\text{ع}_1\left(\frac{\delta \text{ح}}{\delta \text{ع}_1}\right)=\text{صفر} \qquad (٢)$$

$$\text{ع}_1\left(\frac{\delta \text{س}}{\delta \text{ع}}\right)+\text{ع}_1\left(\frac{\delta \text{س}_2}{\delta \text{ع}_1}\right)=-\text{س}_1$$

لحل المعادلات (٢) نوجد محدد القام:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\text{ف}_{11} & \text{ف}_{21} & -\text{ع}_1\\ \text{ف}_{12} & \text{ف}_{22} & -\text{ع}_2\\ \text{ع}_1 & \text{ع}_2 & \text{صفر}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\delta \text{س}_1}{\delta \text{ع}_1}=\frac{1}{\Delta}\times\begin{vmatrix}\text{ح} & \text{ف}_{21} & -\text{ع}_1\\ \text{صفر} & \text{ف}_{22} & -\text{ع}_2\\ \text{ع}_1 & \text{ع}_2 & \text{صفر}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left[\text{ح}\,\text{ع}_2^{2}-\text{س}_1(\text{ع}_1\text{ف}_{22}-\text{ع}_2\text{ف}_{21})\right]$$

$$= \left(\frac{-ع_2^2}{\Delta} \right) - س_1 \left(\frac{ع_1 ف_{22} - ع_2 ف_{21}}{\Delta} \right)$$

لحل مجموعة المعادلات (٢)

نلاحظ أولا أن محدد المقام هو Δ التى أوجدناها فى حساب أثر تغير الدخل أى أنه يساوى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ف_{11} & ف_{21} & -ع_1 \\ ف_{12} & ف_{22} & -ع_2 \\ ع_1 & ع_2 & صفر \end{vmatrix}$$

ولإيجاد معدلات التغير نحسب محدد البسط فى كل حالة ونقسمه على Δ فيكون :

أولا .. معدل تغير كمية السلعة الأولى $س_1$ بالنسبة لسعرها $ع_1$ هو :

$$\frac{\delta س_1}{\delta ع_1} = \frac{1}{\Delta} + \begin{vmatrix} - & ف_{21} & -ع_1 \\ صفر & ف_{22} & -ع_2 \\ -س_1 & ع_2 & صفر \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\text{ح}\,\text{ع}_{٢}^{٢}}{\Delta} - \text{س}_{١} \left(\frac{\text{ع}_{١}\,\text{ف}_{٢٢} - \text{ع}_{٢}\,\text{ف}_{٢١}}{\Delta} \right) \qquad (٣)$$

ولكن بالرجوع لدراسة أثر تغير الدخل التى أجريناها من قبل نلاحظ أن معامل س فى الطرف الأيسر من (٣) هو :

$$\frac{\delta\,\text{س}_{١}}{\delta\,\text{ق}} = \frac{\text{ع}_{١}\,\text{ف}_{٢٢} - \text{ع}_{٢}\,\text{ف}_{٢١}}{\Delta}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta\,\text{س}_{١}}{\delta\,\text{ع}_{١}} = \frac{\text{ح}\,\text{ع}_{٢}^{٢}}{\Delta} - \text{س}_{١} \left(\frac{\delta\,\text{س}_{١}}{\delta\,\text{ق}} \right) \qquad (٤)$$

ولكى نفسر باقى حدود المعادلة (٣) نترك مؤقتا الحالة التى لدينا وندرس حالة أخرى قريبة الشبه منها :

لنفرض أنه حدث تغير فى $\text{ع}_{١}$ وصحب ذلك تغير فى الدخل ق بما يضمن إمكان ثبات المقادير $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ التى كان يتحقق عندها التوازن أصلا (أى قبل تغير $\text{ع}_{١}$) إذا معنى ذلك أن $\text{ع}_{١}$ تغيرت ومعها ق . بينما أن $\text{ع}_{٢}$ ، $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ يمكن أن تبقى ثابتة . بناء على ذلك نجد أن معادلة خط السعر (الميزانية) يمكن كتابتها كالآتى :

$$\text{ق} = \text{ع}_{١}\,\text{س}_{١} + \text{ع}_{٢}\,\text{س}_{٢}$$

فيكون معدل تغير الدخل (ق) بالنسبة لتغير $\text{ع}_{١}$ مع ثبات الاشياء الاخرى هو

$$\frac{\delta\,\text{ق}}{\delta\,\text{ع}_{١}} = \text{س}_{١} \qquad (٥)$$

إذا أمكن التعبير عن $س_{1}$ التى ظهرن فى (١٤) بالشكل المبين فى (٥). وهذا فى الواقع أمر واضح ، لأنه إذا ظلت كل من $س_{1}$ ، $ع_{1}$ ، $س_{1}$ ثابتة فإن تغير $ع_{1}$ بوحدة يستتبع تغيرا فى ق بوحدات عددها $س_{1}$. إذا سمحنا الآن للمستهلك أن يتخلص من شرط ثبات $س_{1}$ ، $س_{2}$ وبذلك يستطيع العودة إلى مايشاء من نقطة التوازن . ولكن أبقينا على فرض تغير ق مع تغير $ع_{1}$ ، فإننا نجد ، فى هذه الحالة ، أن تغير ع يتسبب فى تغير كل من $س_{1}$ ، $س_{2}$ بجانب تسببه فى تغير ق أى أن ، الشىء الوحيد الثابت الآن هو $ع_{2}$ مع ملاحظة أن ق تتغير بشكل معين هو المحدد بالمعادلة (٥) .

فى هذه الحالة نجد أن التغير الكلى فى المقدار $س_{1}$ بسبب تغير $ع_{1}$ هو مجموع مقدارين :

الأول : هو التغير المباشر فى $س_{1}$ بسبب تغير $ع_{1}$

والثانى : هو التغير غير المباشر فى $س_{2}$ بسبب تغير ق نتيجة لتغير $ع_{1}$.وهذا يعبر عنه بالمعادلة الآتية :

$$\frac{d\,\text{س}_1}{d\,\text{ع}_1} = \left(\frac{\delta\,\text{س}_1}{\delta\,\text{ع}_1}\right) + \frac{\delta\,\text{س}_1}{\delta\,\text{ق}} \times \frac{\delta\,\text{ق}}{\delta\,\text{ع}_1} \qquad (٦)$$

وينتج من هذا ومن المعادلة (٥) أن :

$$\frac{d\,\text{س}_1}{d\,\text{ع}_1} = \left(\frac{\delta\,\text{س}_1}{\delta\,\text{ع}_1}\right)' + \text{س}_1 \left(\frac{\delta\,\text{س}_1}{\delta\,\text{ف}}\right)$$

أى أن $\frac{\delta\, س_{١}}{\delta\, ع_{١}} = \frac{د\, س_{١}}{د\, ع_{١}} - س_{١} \left(\frac{\delta\, س_{١}}{\delta\, ق} \right)$ (٧)

وبمقارنة المعادلتين (٤) ، (٧) نجد أنه من الممكن استنتاج أن الحد الأول من الطرف الأيسر فى (٢) وهو :

$$\frac{ح\, ع^{٢}}{\Delta} = \frac{د\, س_{١}}{د\, ح} \qquad (٨)$$

(ويطلق عليه معامل Siursky)

نستنتج مما سبق أنه أمكن تقسيم أثر تغير السعر $ع_{١}$ مع ثبات $ع_{٢}$ ، ق على الكمية $س_{١}$ إلى جزئين :

__الجزء الأول :__

وهو الموضح فى (٨) يمثل التغير الذى يحدث لو صحب تغير السعر تغير فى الدخل يعوض المستهلك بالضبط عن تغير السعر أى يسمح له لو أراد بأن يبقى عند نقطة التوازن الأصلية .

__والجزء الثانى :__

وهو اللازم لاستبعاد أثر هذا التغير اللازم فى الدخل الذى تصورنا حدوثه مع تغير السعر وهذا معناه أن المستهلك يستطيع أن يفصل بين نوعين للتغير فى السعر.
الأول : هو حدوث تغير مكافىء فى الدخل يترتب عليه تغير موضع خط السعر.

والثانى : هو حدوث إحلال للسلعة التى نقص سعرها نسبيا محل السلعة لأعلى نسبيا . وهذا هو المقصود بتقسيم أثر تغير السعر إلى أثر أحدهما دخلى والثانى احلالى . .

تمارين :

(١) مستهلك داله اشباعه هى :

$$ف = ٢٥ س_١ س_٢ + ١١ س_٢ + ٢ س_٢^٢$$

معلوم دخله ق وأسعار السلعتين $ع_١$ ، $ع_٢$

أوجد معادلة طلبه على كل من هاتين السلعتين ثم استنتج من هاتين المعادلتين معدل تغير الكمية المطلوبة من كل منهما بالنسبة :

أولا : لتغير الدخل

ثانياً : لتغير السعر $ع_١$

٢ — أوجد معدل تغير الكميات بالنسبة لكل من الدخل والسعر $ع_١$ فى التمرين السابق بالطريقة المباشرة وقارن بين الناتجين (عن طريق معادلة الطلب ومفاضلتها) .

٣ — ما هى الشروط التى تجعل :

(ا) السلعة الأولى رديئة .

(ب) « الثانية « .

(حـ) السلعتين معا عاديتان .

٤ — ما هو المقصود بأن دليل الاشباع لا يلزم بأن يكون قياسياً ؟

مستهلك دخله ق = ١٠٠ ينفق دخله على سلعتين $س_١$ ، $س_٢$.

سعراها على التوالى هو $ع_١ = ٢$ ، $ع_٢ = ٥$

اثبت أن نقطة التوازن لهذا المستهلك لا تتغير سواء كانت دالة اشباعه هى :

$ف = س_١ س_٢$

أو $ف = س_١^٢ س_٢^٢$

الجزء الثاني

الانتاج والتكاليف

وسلوك المنتج

مقدمة

يعرض هذا الجزء الجانب الآخر من سلوك الوحدات الاقتصادية داخل السوق ـ سلوك المنتج • ويختلف المنتج عن المستهلك من ناحية التنظيم والذى يأخذ شكل منشأة تتم فيها عملية الإنتاج •

فالمنشأة هى الوحدة الفنية التى يتم فيها إنتاج السلع ويقرر المنظم (صاحب المنشأة والمدير) حجم ما ينتج من سلعة أو أكثر والكيفية التى تنتج بهـا (أسلوب الإنتاج) • وهو الذى يحصل على الربح أو يتحمل الخسارة التى تترتب على قراره ويحول المنظم المدخلات من عوامل الإنتاج إلى مخرجات من الناتج وفقاً للقواعد الفنية التى تحددها دالة الإنتاج • ويمثل الفرق بين ما يحصل عليه من إيراد مبيعات منتجاته و بين تكلفة المدخلات من عوامل الإنتاج الربح الذى يحققه إذا كان الفارق موجبا والخسارة التى يتحملها إذا كان الفارق سالبا •

وتظهر دالة إنتاج المنظم فى صورة رياضية تربط العلاقة بين كميات المدخلات التى يستخدمها وكمية الإنتاج الناتج منها • ذلك بمفهومها العام • ولكن دالة إنتاج معينة قد تمثلها نقطة واحدة ، فأما تظهر فى شكل دالة واحـــدة متصلة أو متقطعة أو فى صورة مجموعة من المعادلات • ومن ثم يمكن عرض الحالات البسيطة لدالة إنتاج واحدة متصلة لهـا مشتقات أولى وثانية جزئية • ويتدرج التحليل إلى الحالات التى يشترك فيها مدخلين (العمل ورأس المال) لإنتاج منتج واحد . ثم يتطور التحليل إلى الحالات العامـة حيث تظهر دالة الإنتاج فى صورة مجموعة من المعادلات الخطية •

والمدخل هو عبارة عن أى سلعة أو خدمة تساهم فى إنتاج منتج ما • وعادة

يستخدم المنظم العديد من المدخلات المختلفة لإنتاج منتج واحد . وعامة تكون مدخلاته ، منتجات منشآت أخرى . فالصلب ، مثلا ، يمثل أحد المدخلات فى صناعة السيارة وهو يمثل منتج نهائى بالنسبة لمنتج الصلب . وبعض المدخلات الأخرى (مثل العمل والأرض والمعادن) لاتنتج . وتصنف المدخلات خلال فترة إنتاجية معينة إلى مدخلات ثابتة أو مدخلات متغيرة . وللدخل الثابت ضرورى للإنتاج ولكن كميته لا تتغير بتغير حجم الإنتاج (كمية السلع المنتجة) . فتكاليفه يتحملها المنظم بصرف النظر عن قراراته بشأن حجم ما ينتجه فى الأجل القصير . وتعتمد الكميات المطلوب استخدامها من المدخلات المتغيرة على حجم الإنتاج والمطلوب . والتفرقة بين المدخلات الثابتة والمتغيرة موقوته . فالمدخلات الثابتة فى فترة معينة من الزمن تصبح متغيرة فى الآجال الأطول . ويتوقف طول هذه الفترة التى تعتبر من الآجال الطويلة ، على نوع المشروع ونطاقه . فالمنظم قد يحتاج إلى فترة ثلاثة أشهر ليشترى آلة جديدة أو التخلص من الآلة الموجودة بالفعل . ومن ثم تعتبر الآلة بالنسبة له مدخل ثابت عند تخطيطه للإنتاج الشهرى . ولكنها تعتبر مدخل متغير فى تخطيطه لإنتاج سنوى فالمدخلات جميعاً تتغير إذا أتيحت آجال طويلة بدرجة تسمح بتوسيع نطاق المشروع وإحلال أى مدخل من المدخلات يود المنظم أن يستعيض عنه بآخر .

ولقد درجت الكتب القديمة على تعريف الإنتاج على أنه « خلق المنفعة » حيث يقصد بالمنفعة « قدرة السلع والخدمات على أشباع الحاجات البشرية » . ويعتبر هذا التعريف ، عام من ناحية . ويشير من الناحية الأخرى ، على أن الإنتاج يشمل مجالا واسعاً للعديد من الأنشطة التى لا تقتصر على إنتاج السلع المادية فقط . فتقديم الاستشارات القانونية ، وتأليف الكتب ، وعرض الأفلام السينمائية وخدمات النقل والمواصلات والبنوك وتجارة الجملة والتجزئة كلها أمثلة للإنتاج . ويصعب فى مثل هذه الحالات (إنتاج الخدمات) أن نحدد المدخلات

التى تشترك فى إنتاجها ، وعلى ذلك ، قد يتفق الغالبية من الأفراد أن بعض الأنواع من المهارات الفنية والذهنية مطلوبة لأداء الخدمات .

ولسنا نختلف فى أن الإنتاج يشير فى معناه العام إلى خلق السلع والخدمات التى يشتريها الأفراد ، ولكننا نرى أن فكرة الإنتاج تكون أكثر وضوحاً للقارىء عندما نتحدث عن إنتاج السلع . ويسهل فى هذه الحالة ، تحديد المدخلات تحديداً دقيقاً وتحديد نوعية وكمية الإنتاج . فانتاج ضريبة من الأرز يحتاج ، بجانب المناخ الملائم لزراعته ومقادير المياه الكافية إلى مساحة معينة من الأرض الزراعية والبذور والسماد وخدمات الآلات الزراعية مثل المحاريث والجرارات والعمل البشرى .

وفى عالم اليوم رغم التطور الحديث والتكنولوجيا المتقدمة فلا زال العنصر البشرى هو أغلى الموارد الاقتصادية جميعاً . وكل إجراء أو عملية من عمليات الإنتاج إلا وتحتاج إلى مدخل من الموارد البشرية . كذلك تظهر الحاجة عادة إلى المدخلات الأخرى . فالإنتاج عادة يحتاج إلى العديد من أنواع المعدات الرأسمالية بصفة خاصة (الآلات والأدوات ، والمحولات ، والمبانى) والمواد الخام أو النصف مصنعة . وتشمل نظرية الإنتاج على تحليل الكيفية التى يجمع فيها رجل الأعمال — فى ضوء ظروف فنية معينة — بين مزيج من العديد من المدخلات لإنتاج أحد المنتجات بطريقة اقتصادية على درجة عالية من الكفاية .

ولما كانت فكرة الإنتاج أوضح عند تطبيقها على السلع بدلا من الخدمات فأننا سنقصر مناقشتنا على الإنتاج الزراعى والصناعى . وتجب الإشارة هنا إلى أن مشاكل تخصيص الموارد فى الخدمات التجارية والصناعية لا تقل أهمية عن مثيلاتها السلعية ولكننا تبسيطاً منا للعرض وتوضيحه آثرنا الاقتصار على الإنتاج السلعى . والحقيقة أنه كلما تغير التركيب العمرى للسكان وارتفع معدل

الإعالة(١) بزيادة تركز إعداد كبيرة من السكان فى فئات العمر التى تقل عن عشرين سنة والتى تزيد عن ٦٠ سنة كلما زادت أهمية الخدمات على زيادة إنتاج السلع . ومن حسن الحظ ، أن مبادىء الإنتاج التى ندرسها فى هذا الجزء تنطبق على إنتاج الخدمات مثلما تنطبق على إنتاج السلع ، ولكن قد يكون تطبيقها أكثر صعوبة فى حالة الإنتاج الخدمى .

وينطبق نفس الشيء بالنسبة لنظرية التكاليف . فدراسة تكاليف منشأة تنتج سلع معينة يكون أيسر من دراسة تكلفة الخدمة . فبالإضافة إلى الصعوبات التى تكتنف (أصلا) تحديد تكاليف وتسعير المنتجات نجد أنها أكثر صعوبة فى حالة تقدير تكاليف وتسعير الخدمات التجارية والخدمات الحكومية . ولهذا سنقتصر على مناقشة منتجى السلع .

وتشمل نظرية التكاليف على تحليل تكاليف الإنتاج (كيف تحدد التكاليف على ضوء المعلومات التى نستخرجها من دالة الإنتاج ، وآثار تناقص الغلة ، والتكاليف فى الأجل القصير والأجل الطويل ... الخ) . بل والأهم من ذلك بناء الأساس لدراسة إجراءات التسعير التى تتبعها منشآت الأعمال المختلفة .

ويشبه تحليل سلوك المنتج تحليل سلوك المستهلك الذى عرضناه فى الأربعة فصول الأولى فى عدد من الجوانب . فالمستهلك يشترى السلع التى تحقق له قدراً

---

(١) معدل الإعالة =

$$\frac{\text{عدد أفراد السكان تحت العشرين + الأفراد فوق سن الستين}}{\text{عدد الأشخاص المنتجين بالمجتمع (٢٠ — ٦٠)}}$$

من الأشباع ، والمنظم يشترى المدخلات التى تنتج له حجما معيناً من السلع .
ويتوافر للمستهلك دالة الاشباع (المنفعة) ، وللمنشأة دالة الإنتاج . ومعادلة ميزانية المستهلك هى دالة خطية فى كميات السلع المشتراه ، ومعادلة تكاليف المنشأة هى دالة خطية فى كميات المدخلات المشتراه . كذلك فإن فرض تحقيق أقصى أشباع له ما يناظره فى نظرية المنشأة . فالمستهلك الرشيد يسعى إلى تعظيم المنفعة التى يحصل عليها من استهلاكه للسلع ، كذلك فإن المنظم الرشيد يسعى إلى تعظيم الربح الذى يحصل عليه من إنتاج وبيع السلع .

والاختلافات بين تحليل سلوك المستهلك وسلوك المنشأة ليست بنفس درجة وضوح أوجه التشابه . فدالة الأشباع شخصية (ذاتية) . والمنفعة غير قابلة للقياس . بينما دالة الإنتاج موضوعية ، وإنتاج المنشأة يمكن قياسه بسهولة .
والمنشأة الفردية يمكنها إنتاج أكثر من منتج واحد . ولذا فإن عملية تعظيم المنظم تمتد ، عادة ، خطوة أبعد من تعظيم أشباع المستهلك . فالمستهلك الرشيد يعظم المنفعة التى يحصل عليها من دخل معين . ويشابه ذلك الإجراء الذى يسلكه المنظم فى تعظيم كمية إنتاجه بمستوى تكلفة معين ، ولكن تكلفته تكون متغيرة بصفة عامة ، وهو يود تعظيم ربحه .

الفصل الخامس

نظرية الانتاج

الانتاج باستخدام مدخل واحد

تحتاج عمليات الإنتاج ، عادة إلى استخدام العديد من المدخلات المتنوعة ، هذه المدخلات من العمل ، ورأس المال ، والمواد الخام لها درجات مختلفة من الجودة والنوع . ويحتاج إنتاج أي منتج من المنتجات إلى استخدام نوعيات مختلفة من كل منها . ولتوضيح تحليل الإنتاج سنقدم في هذا الفصل ، كنوع من التبسيط ، بعض الفروض بغرض تلافي الصعوبات الناجمة عن استخدام المئات من مختلف المدخلات . ولهذا سنركز انتباهنا على المبادئ الأساسية للانتاج .

وسنفترض ، بالذات ، أن هناك مدخل متغير واحد ، وسنطلق عليه تباعا « العمل » ومع ذلك يمكن إضافة مدخلات أخرى . وسنفترض بعد ذلك أن هذا المدخل المتغير يمكن ضمه بنسب مختلفة مع مدخل ثابت واحد لإنتاج كميات مختلفة من المنتجات . وسوف نطلق على المدخل الثابت الأرض . لهذا سيقتصر نقاشنا من المبدأ على مثال معين من الإنتاج : وهو الإنتاج الزراعي .

وأخيراً يلاحظ أن هناك ثلاثة فروض تتضمنها افتراضاتنا المذكورة أعلاه :

(أ) أن هناك مدخل متغير واحد .

(ب) أن هناك مدخل ثابت واحد ،

(ح) أنه يمكن جمع المدخلات بنسب مختلفة لإنتاج السلعة المطلوبة.

المدخلات المتغيرة والثابتة فى الأجلين القصير والطويل :

عند تحليل عملية الإنتاج المادى وما يرتبط بها من تكاليف إنتاج ، يكون من الملائم تقديم تصور تحليلى : حيث نبدأ بتقسيم المدخلات إلى مدخلات ثابتة ومدخلات متغيرة . ويعرف المدخل الثابت على أنه ذلك المدخل الذى لاتتغير كميته مع تغير اتجاهات السوق فيما يختص بالكميات المطلوب طرحها من المنتجات . والمؤكد أنه لايوجد أى مدخل يتسم بالثبات المطلق مهما كان قصر الفترة الزمنية موضع التحليل . ولكننا نلجأ من أجل تبسيط التحليل إلى اعتبار بعض المدخلات ثابتة ، وربما يرجع السبب فى ذلك إلى أنه بينما حقيقة هذه المدخلات أنها متغيرة إلا أن تكاليف تغييرها الفورى باهظة تجعل من المستحيل إتخاذ قرار بشأن تغييرها . فالمبانى والالات الرئيسية والإدارة العليا هى بعض الأمثلة على المدخلات التى لايمكن زيادتها أو خفضها بسرعة . ومن الناحية الأخرى ، يعرف المدخل المتغير على أنه المدخل الذى تتغير كميته استجابة سريعة للرغبة فى تغيير حجم الإنتاج . ومن أمثلتها العديد من أنواع خدمات العمل والمواد الأولية والنصف مصنعة .

وبالإضافة إلى التفرقة بين المدخلات المتغيرة والمدخلات الثابتة ، يفرق الاقتصادى بين الأجل القصير والأجل الطويل . ويشير الأجل القصير إلى الفترة الزمنية التى يكون فيها أحد المدخلات ، على الأقل ، ثابتا . ومن ثم ، فإن التغيرات فى الإنتاج تأتى كلها عن طريق المتغيرات فى استخدام المدخلات المتغيرة . لذلك إذا أراد المنتج أن يتوسع فى إنتاجه فى الأجل القصير يتعين عليه زيادة عدد ساعات العمل مع بقاء حجم المصنع ونطاق مشروعه دون تغير . كذلك ، إذا أراد أن يخفض من حجم إنتاجه ، فى الأجل القصير ، فقد يلجأ

إلى تخفيض عدد ساعات العمل أو الاستغناء عن بعض أنواع العمال ، ولكنه لايستطيع التخلص من أحد الابنية أو أحد الآلات الرئيسية بمجرد توافر الرغبة لديه فى الحد من كمية الإنتاج .. ومع ذلك فإنه يستطيع التوقف عن استخدامها فى الأجل القصير .. دون أن يقدر على التخلص من أعباء تكاليفها لأنه قام بتسديد ثمن شرائها وتركيبها بالفعل .. فسواء انتج المزيد أو انتج القليل أو حتى توقف عن الإنتاج كلية فلا يزال عبء هذه المدخلات ثابتا فى الأجل القصير. وليس أمامه من سبيل فى الفترة القصيرة إلا توزيع هذه التكلفة على أكبر عدد من المنتجات . وإلى أن تهلك هذه الأصول الثابتة بالاستعمال أو التقادم فإن عبئها فى الأجل القصير .. ولكن حين يتم اهلاكها بعد مرور فترة من الزمن يمكن للمنتج أن يجددها ويحل أصول أخرى محلها أو حتى يضيف إليها أصول جديدة يزيد بها طاقته الإنتاجية .

كل هذا يكون محتملا فى الأجل الطويل .. لذلك يعرف الأجل الطويل، بالفترة الزمنية (البعد الزمنى للتخطيط) التى يمكن أن تتغير فيها جميع المدخلات وبعبارة أخرى ، يشير الأجل الطويل إلى تلك الفترة الزمنية فى المستقبل التى يتغير فيها الانتاج بالطريقة التى تعود على رجل الأعمال بأقصى الاستفادة . فى الأجل القصير ، على سبيل المثال ، يستطيع المنتج أن يتوسع فى إنتاجه فى حدود طاقته الإنتاجية بزيادة عدد ساعات العمل اليومية ، ويتضمن ذلك دفع أجور إضافية للعمال . ولكن فى الأجل الطويل ربما يكون من الأفضل له اقتصاديا أن يضيف وسائل إنتاجية أخرى ويعمل بنفس معدلات الأداء اليومية العادية .

وسوف نركز فى هذا الجزء على تحليل نظرية الإنتاج فى الأجل القصير حين نخلط فى العملية الإنتاجية كمية من المدخلات المتغيرة المختلفة مع كمية معينة من المدخل الثابت لإنتاج كميات مختلفة من المنتجات . وسوف نتبع

ذلك فيما بعد بدراسة تنظيم الإنتاج فى الأجل الطويل وكيف أنها تحدد على ضوء التكلفة النسبية للانتاج بالحجم المطلوب باستخدام مجموعات مختلفة من المدخلات .

نسب ثابتة أو متغيرة :

كما أشرنا من قبل ، ستتركز مناقشتنا بالدرجة الأولى على استخدام مقدار ثابت من أحد المدخلات مع مقدار متغير من مدخل آخر لإنتاج كميات متغيرة من المنتج . ويعنى ذلك أن اهتمامنا سيوجه أساساً إلى الإنتاج فى ظل ظروف نسب متغيرة . أى نسبة كميات المدخل قد تتغير . ويتعين على رجل الأعمال ألا يحدد مستوى الإنتاج الذى يرغبه فحسب ولكن عليه كذلك ، أن يحدد النسبة المثلى التى يمزج بها المدخلات (فى الأجل الطويل) .

وهناك طريقتين مختلفتين لصياغة مبدأ النسب المتغيرة .

الأول : أن الإنتاج ذى النسب المتغيرة ينطوى بداهة على أن حجم الإنتاج يمكن أن يتغير ، فى الأجل القصير عن طريق تغيير مقدار المدخلات المتغيرة المستخدمة بالاشتراك مع المدخلات الثابتة . وطبيعى أنه لو تغير أحد المدخلات الثابتة . وطبيعى أنه لو تغير أحد المدخلات ، مع بقاء الاجر ثابتا ، ستتغير النيسة .

والثانى : أنه عندما يكون الإنتاج خاضعا للنسب المتغيرة فإنه يمكن الحصول على نفس مستوى الإنتاج باستخدام تركيبات متعددة من مختلف توليفات المدخلات ـ أى بنسب مختلفة من المدخلات . وقد تنطبق هذه الحالة على الأجل الطويل فقط ، ولكنها تلائم الأجل القصير عندما يوجد أكثر من مدخل متغير.

ويعتبر الغالبية من الاقتصاديين أن الإنتاج فى ظل ظروف النسب المتغيرة يمثل نموذجا للانتاج فى كلا الأجلين القصير والطويل . وليس هناك أدنى شك فى أن النسب تكون متغيرة فى الأجل الطويل . فعندما يتخذ رجل الأعمال قرار استثمارى فقد يختار من بين مجالات متنوعة من طرق الإنتاج المختلفة . أما أن يلجأ إلى الإنتاج الكبير ويستخدم رأس المال بكثافة أو يختار وحدات إنتاجية صغيرة كثيفة العمل أو غير ذلك من أساليب الإنتاج المختلفة . ولكن فى الأجل القصير قد تكون هناك حالات يكون فيها المنتج مقيداً بطريقة للانتاج تخضع للنسب الثابتة .

والإنتاج بالنسب الثابتة ، يعنى أن نسبة واحدة ، وواحدة فقط ، من المدخلات هى التى يمكن استخدامها لإنتاج السلعة . فإذا أريد زيادة الإنتاج أو تخفيضه فلابد من التوسع فى استخدام المدخلات أو الحد من استخدامها بالقدر الذى يحافظ على النسبة الثابتة للمدخلات . وتبد لأول وهلة أن هذه تمثل ظروفا عادية: رجل واحد يعمل بجاروف واحد يشق ترعة صغيرة . وحدتين من الأيدروجين مع وحدة من الأوكسوجين تنتج المياه . ولكن إضافة جاروف آخر أو وحدة ثابتة من الأوكسوجين لن تؤدى إلى زيادة معدل الإنتاج . فالجاروف الثانى يحتاج إلى رجل آخر يعمل به . . ووحدة الأوكسوجين تحتاج إلى وحدتين أخريين من الأيدروجين لتعطى مزيداً من الماء .

والأمثلة على الإنتاج الثابت النسب ، يصعب مشاهدتها فى واقع الحياة . حتى إنتاج المركبات الكيمائية يخضع للنسب المتغيرة ، فصحيحا أن الأيدروجين والأوكسوجين يتحدان بنسبة ثابتة (٢ : ١) لانتاج المياه . ولكن حصيلة المياه المتجمعة من مقدار معين من الأيدروجين والأوكسوجين يعتمد على مقدار المادة الحفازة CATALYST المستخدمة فالنسبة تكون فى الحقيقة متغيرة بالنسبة للحفاز ، ليس فى هذه الحالة فقط ولكن فى إنتاج أى مركب كيمائى آخر .

ومثال إنتاج المياه باستخدام نسب ثابتة من الأيدروجين والأوكسوجين يقدم العملية الإنتاجيه بطريقة ملائمة . ففى الأجل القصير ، يمكن التمييز بين ثلاثة أصناف من المدخلات :

(١) فهناك المدخلات الثابتة التى لا تتغير كميتها على الإطلاق فى الأجـــل القصير .

و (٢) المدخلات المتغيرة التى قد يتغير استخدامها .

و (٣) وعناصر المدخلات التى تتغير بالفعل ولكن تغيرها يسير وفقاً لنسب ثابتة بعضها للآخر وبالنسبة للإنتاج .

ويمكن إعطـاء أمثله لهذه العناصر . . فـكل صنف من السجائر يحتوى على توليفة معينة من الدخان . أى أن أنواع الدخان المختلفة تمزج بنسب ثابتة . ويستخدم مقــــدار ثابت من الدخان المخلوط فى كل سيجارة . ولكن إنتاج السجائر يحتاج إلى أكثر من النسب الثابتة للمدخلات من هذه العناصر . فهو يحتاج إلى الآلات (آلات لف السجائر ، وآلات التعبئة وغيرها) ويستخدم مع رأس المال هــــذا خدمات العمل البشرى . وفى الأجل القصير ، تعتبر المبانى والمعدات الرأسمالية من الآلات وخلافـه مدخلات ثابتة وغالبية خدمات العمل مدخلات متغيرة .

وسوف نؤكد عند مناقشة الإنتاج على المدخلات الثابتةو المتغيرة. والمدخلات من العناصر لا شك أنها ضرورية ، ويتعين استخدامها بنسب ثابتة أو ثابتة نسبيا وإلا تغيرت نوعية المنتج وخواصه . والفرصة المتاحة أمام المنتج للاختيارفى هذا الخصوص محدودة فهى مسائل فنية لا يستطيع تحديدها بنفسه . ولهذا سنوجه اهتمامنا إلى جوانب الإنتاج التى يمكن أن يسيطر عليها رجل الأعمال .

دالة الإنتاج :

لقد أكدنا فى مناقشتنا السابقة على أن كمية الإنتاج تعتمد ، أو دالة فى ، كمية المدخلات المختلفة المستخدمة فى العملية الإنتاجية، ويعبر عن هذه العلاقة أساساً بدالة الإنتاج التى تربط حجم الإنتاج بالمدخلات .

وتعرف دالة الإنتاج على أنها الجدول (أو المعادلة الرياضية) التى تبين أقصى حجم إنتاج يمكن الحصول عليه من مجموعة من المدخلات ، فى ضوء التكنولوجيا المتاحة . أى أن دالة الإنتاج تعبر باختصار عن قائمة لإمكانيات الإنتاج .

إجمالى الإنتاج :

ويمكن عرض دالة الإنتاج فى صورة جدول أو فى شكل معادلة رياضية . وفى كلتا الحالتين تعطى دالة الإنتاج فى الاجل القصير إجمالى (أو أقصى) الإنتاج الذى يمكن الحصول عليه باستخدام مقادير مختلفة من المدخلات المتغيرة مع مقدار محدد من المدخل الثابت والمقادير المطلوبة من عناصر المدخلات[1] .

---

(١) إذا فرضنا أن ك تمثل حجم الإنتاج ، وأن هناك مدخل متغير واحد هو س ومدخل ثابت واحد هو ص والمطلوب من عناصر المدخلات (المواد) هو ن فإنه يمكن كتابة دالة الإنتاج القصيرة الاجل ، فى صورة رياضية على النحو التالى :

$$ك = د \left(\frac{س}{ص} ، ن \right)$$

وكمثال لذلك نعرض تجربة لزراعة القمح فى قطعة من الأرض مساحتها ثلاثة أفدنة وتمثل الأرض فى هذه الحالة المدخل الثابت وتمثل البذور عناصر المدخل (المواد) والمدخل المتغير هو كمية العمل معبر عنه برجل / سنة . ويظهر الإنتاج على النحو التالى :

جدول (٥ – ١)

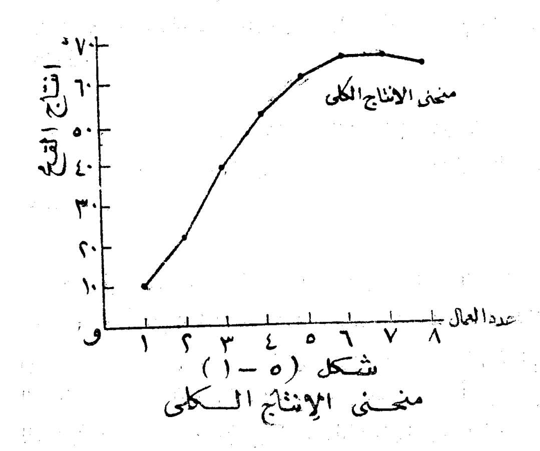
إنتاج القمح بالأردب

باستخدام قطع مختلفة من الأرض مساحة كل قطعة ٣ أفدنة

نمرة القطعة	عدد العمال	إجمالى الإنتاج
١	١	١٠
٢	٢	٢٤
٣	٣	٣٩
٤	٤	٥٢
٥	٥	٦١
٦	٦	٦٤
٧	٧	٦٥
٨	٨	٦٤

ويلاحظ أننا استخدمنا ٨ مزارع مختلفة مساحة كل منها ٣ أفدنة . ويعمل بالمزرعة الأولى عامل واحد . والثانية عاملين . والثالثة ثلاثة عمال ، وهكذا . . إلى أن نصل إلى المزرعة الثامنة حيث يعمل بها ثمانية عمال. ويظهر إجمالى الإنتاج فى العمود الثالث من جدول (٥ – ١) .

ويمكن تصوير هذه البيانات الواردة بالجدول (٥ – ١) على النحو المبين بالشكل (٥ – ١) .



شكل (٥ – ١)
منحنى الإنتاج الكلى

ولما كان الإنتاج دالة فى المدخل من عنصر العمل ، فإنه (إجمالى الإنتاج) يظهر على الإحداثى الرأسى . ويمثل الاحداثى الافقى المتغير المستقل (عدد العمال) وبتوصيل النقط المختلفة نحصل على منحنى الإنتاج الكلى على النحو المبين بالشكل (٥ – ١) . وتجدر ملاحظة أن المنحنى يبدأ أولا فى الارتفاع

ببطء ثم يرتفع بشكل أسرع ويعود إلى الارتفاع ببطء ثانية إلى أن يصل إلى أقصى ارتفاع يبدأ بعدها فى الإنخفاض . ويرجع السبب فى ذلك إلى قانون تناقص الغلة .

الإنتاج الحدى والإنتاج المتوسط :

الإنتاج المتوسط لأحد المدخلات . هو الإنتاج الكلى مقسوما على مقدار ما استخدم من المدخل فى إنتاج هذا الانتاج . لذلك فإن الإنتاج المتوسط هو نسبة الإنتاج للمدخل لكل مستوى من مستويات الإنتاج وحجم المدخل المناظر له .

والإنتاج الحدى لمدخل من المدخلات هو الإضافة إلى الإنتاج الكلى نتيجة إضافة وحدة واحدة من المدخل المتغير إلى العملية الإنتاجية . بينما يتبقى المدخل الثابت كما هو .

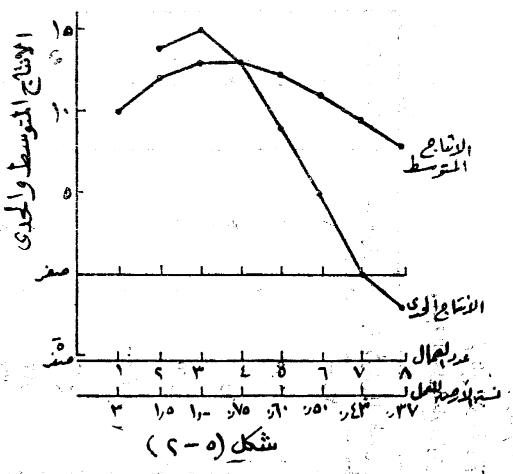
ويصور الجدول (٥ – ٢) والشكل (٥ – ٢) بعض الملامح الهامة لحقيقة العملية الإنتاجية ومنه يلاحظ أن كلا الإنتاج الحدى والمتوسط يرتفعان أولا وصلان إلى القمة ثم يتجهان إلى الإنخفاض . ويمكن أن ينخفض الإنتاج المتوسط حتى يصل إلى الصفر ، لأن الإنتاج الكلى نفسه يمكن أن ينخفض إلى هذه النقطة . وقد يستمر الإنتاج الحدى فى الإنخفاض ليصبح سالبا .

جدول (٥ — ٢)

الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدى

ونسبة المدخل لقطع الأرض ذات الثلاث أفدنة

رقم القطعة	عدد العمال	نسبة الأرض إلى العمل	الإنتاج الكلى	متوسط إنتاج العامل	الإنتاج الحدى للعامل
١	١	—ر٣	١٠	١٠	—
٢	٢	٥ر١	٢٤	١٢	١٤
٣	٣	ر١	٣٩	١٣	١٥
٤	٤	٧٥ر	٥٢	١٣	١٣
٥	٥	٦٠ر	٦١	٢ر١٢	٩
٦	٦	٥٠ر	٦٦	٠ر١١	٥
٧	٧	٤٣ر	٦٦	٤ر٩	صفر
٨	٨	٣٧ر	٦٤	٠ر٨	—٢



شكل (٥ – ٢)

الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدى

ويلاحظ على هذا المثال أن الإنتاج الحدى للعمل أصبح سالبا ، ذلك لأن المدخل المتغير قد استخدم بكثافة مع المدخل الثابت (الأرض) .

كذلك يلاحظ أن الإنتاج الحدى يزيد على الانتاج المتوسط عندما يرتفع الانتاج المتوسط ويساويه عندما يصل الانتاج المتوسط إلى أقصاه ويقع أسفله عندما ينخفض الانتاج المتوسط . وتتبع هذه الظاهرة تعريف الانتاج الحدى والمتوسط . فطالما أن الاضافة إلى الانتاج الكلى تزيد على المتوسط السابق فإن المتوسط لا بد وأن يزيد . ولكن عندما تكون الاضافة إلى الاجمالى أقل من المتوسط السابق فإن المتوسط الجديد يكون أقل . وحيث أن الاضافات ترتفع أولا ثم تنخفض بعد ذلك فإنه يحدث نفس الشىء بالنسبة للمتوسطات . وعليه يتعين تقاطع المنحنيين عند نقطة يصل فيها منحنى الانتاجية المتوسطة إلى أقصاه .

والخاصية الثالثة التى يجب ملاحظتها هى أنه كلما انخفضت نسبة المدخل (الأرض ـ العمل) فإن نسبة الانتاج للعمل ترتفع أولا ثم تنخفض بعد ذلك : وتسلك الانتاجية الحدية للعمل نفس الاتجاه كما سنوالى توضيحه .

قانون تناقص الغلة :

يصور شكل منحنى الانتاجية الحدية فى الشكل (٥ — ٢) مبدأ هام يعرف بقانون تناقص الغلة .

فبمقارنة إنتاج القطعة واحد بإنتاج القطعة اثنين كما وردت بالجدول (٥ — ٢) نلاحظ أنه فى حالة استخدام عاملين بدلا من عامل واحد يرتفع الانتاج بعدد ١٤ أردب ، أى ترتفع الانتاجية الحدية للعمل عند تشغيل عاملين . كذلك فإنه بمقارنة القطعة الثانية بالقطعة الثالثة نرى أن استخدام العامل الثالث قد أدى إلى زيادة الانتاج بمقدار ١٥ أردب . وعليه فإن الانتاجية الحدية للعمل ترتفع كلما زاد عدد العمال ، وربما يحدث ذلك عندما تكون نسبة الأرض للعمل مرتفعة .

ولكن كلما انخفضت نسبة المدخل انخفضت الانتاجية الحدية للمدخل المتغير . فعندما يزيد عدد وحدات المدخل المتغير ، فان كل وحدة تتحمل وحدات أقل فى المتوسط من المدخل الثابت التى تعمل معه . وفى أول الأمر عندما يكون المدخل الثابت وفيراً فان استخدام المدخل المتغير بكثافة مع المدخل الثابت قد يزيد من الانتاجية الحدية للمدخل . ولكننا سرعان ما نصل إلى نقطة نجد عندها أن زيادة تكثيف استخدام المتغير مع المدخل الثابت تعطى غلة أقل فأقل تباعاً .

لذلك يعرف قانون تناقص الغلة على أنه كلما زاد استخدام المدخل

المتغير مع ثبات المدخل الثابت ، فإننا نصل إلى نقطة تبدأ عندها الانتاجية الحدية فى الانخفاض .

منحنيات الانتاجية للمقادير المختلفة من المدخل الثابت :

يعتبر المدخل الثابت معلمه Paramerer من المعالم التى تؤدى إلى انتقال مجموعة منحنيات الانتاج جميعاً . وبصفة عامة ، كلما زاد المقدار المتاح من المدخل الثابت كلما زادت نسبة المدخل وزاد الانتاج الكلى والمتوسط والحدى . وتؤدى زيادة نسبة الأرض إلى العمل إلى زيادة مقدار المدخل الثابت المتاح لكل وحدة من المدخل المتغير . ويؤدى ذلك ، فى العادة ، إلى زيادة الانتاج الحدى ومن ثم الانتاج المتوسط والكلى للمدخل المتغير .

ويصور الجدول (٥ — ٣) هذه الحالة ، وتمثل بيانيا فى الاشكال (٥—٣) (٥ — ٤)[1] .

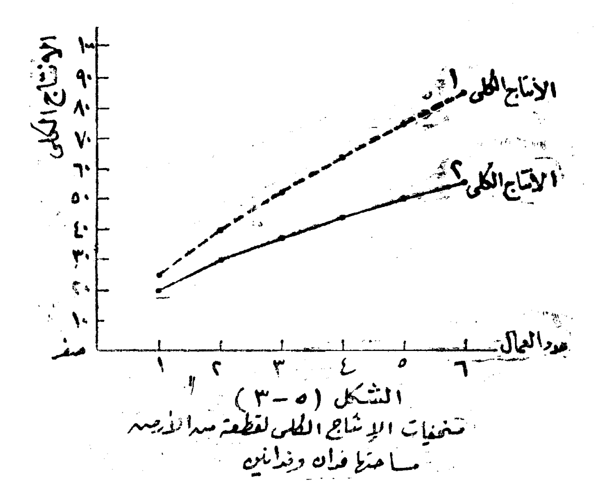
(١) وسوف نلاحظ أنه بينما يتزايد الإنتاج المتوسط للمدخل المتغير يكون الانتاج الحدى للمدخل الثابت سالبا ، لهذا فان النتائج التى يوضحها هذا المثال تنطبق على المجال الانتاجى الذى يبدأ من أقصى إنتاج متوسط إلى النقطة التى يصل فيها الناتج الحدى للمدخل المتغير إلى الصفر .

جدول (٥ — ٣)

الانتاج الـكلى والمتوسط والحدى

لقطع من الأرض مساحتها فدان وفدانين

الانتاج	مساحة القطعة	عدد العمال ١	٢	٣	٤	٥	٦
الـكلى	فدان	٢٠	٣٠	٣٧ر٥	٤٤	٥٠	٥٥ر٥
	فدانين	٢٥	٤٠	٥٢ر٥	٦٤	٧٥	٨٥ر٥
المتوسط	فدان	٢٠	١٥	١٢ر٥	١١	١٠	٩ر٢٥
	فدانين	٢٥	٢٠	١٧ر٥	١٦	١٥	١٤ر٢٥
الحدى	فدان	—	١٠	٧ر٥	٦ر٥	٦	٥ر٥
	فدانين	—	١٥	١٢ر٥	١١ر٥	١١	١٠ر٥



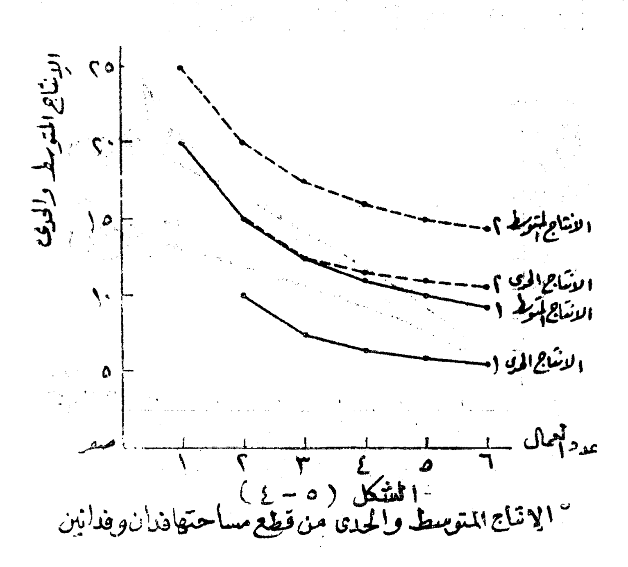
الشكل (٥ - ٣)

منحنيات الإنتاج الكلى لقطعة من الأرض

مساحتها فدان وفدانين

ويبين الصف الأول فى كل جزء من الجدول (٥ — ٣) البيانات الخاصة بالتجربة الزراعية التى أجريت على قطعة من الأرض مساحتها فدان بينما يبين الصف الثانى البيانات المناظرة على القطع ذات مساحة فدانيين .

وبمقارنة البيانات الواردة بالصف الأول مع تلك المبينة بالصف الثانى يتضح لنا أنه لكل مقدار من المدخل المتغير يكون الناتج الكلى والمتوسط والحدى أكبر فى قطع الأرض ذات الفدانين . ويوضح الجدول والأشكال البيانية أنه بالنسبة لجميع مراحل الانتاج يؤدى زيادة المدخل الثابت إلى زيادة إنتاجية المدخل المتغير .



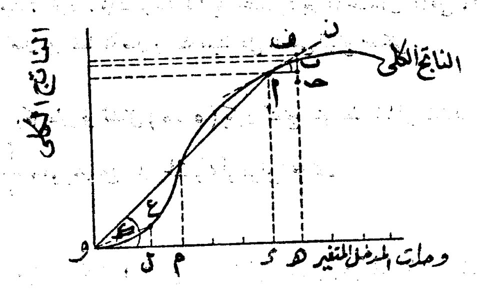
الشكل (٥ — ٤)
الإنتاج المتوسط والحدى من قطع مساحتها فدان وفدانين

مراحـل الانتاج

تركزت دراستنا للإنتاج حتى الآن على دالة وحيدة منفصلة للإنتاج يمكن تصويرها بالأرقام فى شكل جدول . ولكننا سنتحول الآن إلى دراسة الصيغة العامة الأكثر شيوعا والتى يمكن فيها استخدام كلا من معادلات الإنتاج المستمرة والمتقطعة .

الشكل البيانى لمنحنيات الناتج المتوسط :

إن الصيغة المألوفة لمنحنيات (متصلة) للناتج الاجمالى تظهر على النحو المبين بالشكل (٥ — ٥) . وفى هذا الشكل شأنه بقية الأشكال الأخرى التى تصور



الشكل (٥ — ٥)
منحنيات الناتج

الناتج من مدخل متغير واحد تظهر وحدات المدخل المتغير على الاحداثى الأفقى بينما يمثل الاحداثى الرأسى الناتج الاجمالى .

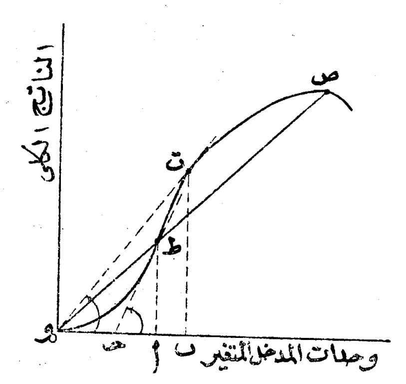
على ضوء معرفة منحنى الناتج الكلى المبين بالشكل (٥ ـ ٥) نود استخراج منحنى الناتج المتوسط .. فأولا .. يعرف الناتج المتوسط على أنه يمثل الناتج الكلى مقسوما على عدد وحدات المدخل المتغير المستخدم فى العملية الانتاجية . أو نسبة الناتج إلى المدخل المتغير . وإنتاج كمية من الناتج الكلى و ص = أ د يتطلب صقر د من وحدات المدخل المتغير . ولهذا فإن الناتج المتوسط للوحدات و د من المدخل المتغير هو $\frac{\text{أ د}}{\text{و د}}$. كذلك فإن الناتج المتوسط للوحدات و ل من المدخل المتغير هو $\frac{\text{ل ع}}{\text{و ل}}$ وللوحدات و م هو $\frac{\text{م ك}}{\text{و م}}$. وفى كل حالة نريد الحصول على الناتج المتوسط المناظر لنقطة معينة على منحنى الناتج الكلى فإننا نوجد ميل الخط الذى يصل من نقطة الأصل والنقطة المحددة على منحنى الناتج الكلى وبعبارة أخرى ، فإننا نوجد الزاوية المحصورة بين الاحداثى الأفقى والخط الواصل بين نقطة الأصل ونقطة معينة على منحنى الناتج الكلى .

وكما يظهر فى الشكل (٥ ـ ٥) يكون الناتج المتوسط المناظر للنقطة أ هو $\frac{\text{د أ}}{\text{و د}}$ وهو يعبر عن ميل الخط و أ أو الزاوية $\measuredangle$.

ويلاحظ كذلك ان الناتج المتوسط للوحدات و م هو نفس الناتج المتوسط للوحدات و د من المدخل المتغير لأن ميل الخط و ك هو نفسه ميل الخط و أ (وفى كلتا الحالتين يكون الناتج المتوسط مساوياً للزاوية $\measuredangle$) . وحيث أن الناتج المتوسط يزيد كلما تحركنا على منحنى الناتج الكلى من نقطة الأصل إلى

النقطة ك وينخفض كلما تحركنا من النقطة أ إلى النقطة ب فانه يمكن أن نتبين أن الناتج المتوسط يصل إلى أقصاه عند نقطة تقع بين ك ، أ على منحنى الناتج الكلى .

والحقيقة أن الناتج المتوسط يصل إلى أقصاه عند نقطة فى الوسط ؛ فكما يتضح من الشكل (٥ — ٦) تناظر النقط ط ص النقطة ك ا فى الشكل (٥ — ٥) فكل زوج من النقط يقع على محور متفرع من نقطة الأصل . ولهذا فإن الناتج المتوسط عند النقطة ط يساوى الناتج المتوسط عند النقطة ص . ولما كان الناتج



الشكل (٥ — ٦)
النهايات العظمى للناتج المتوسط والحدى

المتوسط هو ميل المحور المتفرع من نقطة الأصل إلى نقطة على المنحنى ، فإن الناتج المتوسط يصل إلى أقصاه عندما يصل ميل الخط إلى أقصى درجة من الميل .

ويحدث ذلك بالطبع عندما يمس الخط الممتد من نقطة الأصل إلى منحنى الناتج الكلى عند النقطة ت بزاوية سه بالشكل (٥ ـ ٦) .

وكلما انتقلنا من نقطة الأصل إلى النقطة ص مارا بالنقطة ت كلما زاد انحدار الخط الممتد من نقطة الأصل . كذلك كلما انتقلنا من النقطة ت إلى النقطة ص كلما اتجه الخط إلى أسفل ليصبح أقل انحداراً . ومن ثم فإننا تثبت بذلك النقطة الهامة التالية :

يمكن التعبير عن الناتج المتوسط المناظر لأى نقطة على منحنى الناتج الكلى بميل الخط الممتد من نقطة الأصل إلى النقطة الواقعة على المنحنى والتى تسمى إلى قياس الناتج المتوسط عندها . ويصل الناتج المتوسط إلى أقصاه عندما يمس هذا الخط منحنى الناتج الكلى :

الشكل البيانى لمنحنيات الناتج الحدى :

يمكن استخدام الأشكال (٥ — ٥) و (٥ — ٦) فى إيجـــاد بعض العلاقات الكمية والنوعية لمنحنى الناتج الحدى .

فبالرجوع إلى الشكل (٥ — ٥) نجد أن الناتج الحدى بالتعريف هـــو الإضافة إلى الناتج الكلى نتيجة إضافة وحدة واحدة من المدخل المتغـــير إلى مقدار ما من المدخل الثابت . فلو فرضنا أن مقدار المدخل المتغير قد ارتفع من و د إلى و هـ أو بالمقدار د هـ = أ حـ . فإن الإنتاج سيرتفع من و ص إلى و س أو بالمقدار ص س = ب حـ . ومن ثم يكون الناتج الحدى هو $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$. وفى

حالة المنحنيات غير المتصلة لا توجد وسيلة مناسبة لقياس الميل لأن القوس «اب» ليس خطى . أى أنه لا يمكن الحصول على مقياس وحيد للميل لأن ميل الزاوية المحصورة بين القوس « ا ب » ، والخط « ا حـ » تتغير على طول الجزء « ى هـ = ا حـ » .

ولكننا دعنا نفترض ، مؤقتا ، أن منحنى الناتج الكلى خطى بين النقطتين « أ ، ف » ولذا فإن الزيادة بالمقدار « ى هـ » فى المدخل المتغير ستؤدى إلى زيادة الإنتاج من « و ص » إلى « و ى » أو بالمقدار « ص ى = حـ ف »

وفى هذه الحالة ، يكون الناتج الحدى هو $\frac{\text{حـ ف}}{\text{ا حـ}}$ أو ميل الزاوية المحصورة بين

القوس « ا ب » والخط « ا حـ » . ويبالغ المقياس $\frac{\text{حـ ف}}{\text{ا حـ}}$ فى الحجم الحقيقى

للناتج الحدى $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ا حـ}}$ .. ولكن كلما أصبحت الإضافات فى المدخل المتغير أصغر

فأصغر كلما كان التقدير التقريبى أفضل وأفضل . وفى النهاية عندما تصبح الزيادة فى المدخل المتغير صغيرة جداً فإن المماس للنقطة «ا» والمشار إليه بالرمز ت . ت يقترب من الميل الحقيقى لمنحنى الناتج الكلى . لذلك فإن التغيرات الصغيرة جداً فى المدخل المتغير تجعل ميل منحنى الناتج الكلى عند أى نقطة يمثل تقدير أقرب لحقيقة الناتج الحدى[1] .

---

(١) لنفرض أن دالة الإنتاج هى « ط » = « د » (س) . فإذا رمزنا إلى التغير فى المدخل المتغير بالرمز Δ س ، والإنتاج الجديد « د » (س + Δ س) .

فان الناتج الحدى يكون بالتعريف هو :

$$\text{ن ح} = \frac{\text{د (س + Δس) — د (س)}}{\text{Δ س}} =$$

ويعطى ميل المماس لمنحنى من المنحنيات عند نقطة معينة . ميل هذا المنحنى عند هذه النقطة . لذلك فان الناتج الحدى عند النقطة ط بالشكل (٥ – ٦) هو ميل الخط حـ ط أو مماس الزاوية $\measuredangle = \frac{\text{ا ط}}{\text{حـ ا}}$. ويصل الناتج الحدى إلى أقصاه عند استخدام الكمية و ا من وحدات المدخل المتغير . حيث يكون ميل المماس لمنحنى الناتج الكلى أكثر انحداراً عند النقطة ط عن انحداره عند أى نقطة أخرى .

وهناك بعض العلاقات الأخرى التى تثير الاهتمام ويمكن استخراجها من الشكل (٥ – ٦) . أولا .. لنتذكر أن أقصى ناتج متوسط يرتبط بالكمية و «ب» «وب» من وحدات المدخل المتغير ويقابل النقطة «ت» . لذلك فان الناتج الحدى يصل إلى أقصاه عند مستوى من المدخل المتغير أقل من المستوى الذى يحقق عنده أقصى ناتج متوسط . ثانيا .. يلاحظ أن المماس لمنحنى الناتج الكلى عند النقطة «ب» (الخط الذى يعطى ميله الناتج الحدى المقابل للنقطة ب) هو الخط « و ت » .. ولقد سبق أن ذكرنا أن ميل الخط « و ت » يعطى كذلك الناتج المتوسط المرتبط بالنقطة «ت» ويصل الناتج المتوسط إلى أقصاه عند هذه النقطة . ولهذا فان الناتج الحدى يساوى الناتج المتوسط عندما يصل الأخير إلى أقصاه .

= ولكنه بالتعريف أيضاً تكون المشتقة الأولى للدالة ء (س) هى :

$$\Delta \frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} = \underset{\text{س} \to \text{صفر}}{\text{نها}} \frac{\text{ء}(\text{س}+\text{٨س}) - \text{ء}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$$

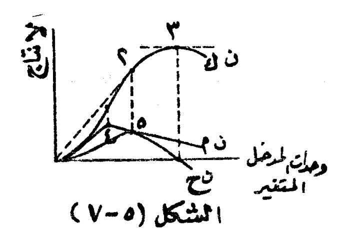
لذلك فانه فى النهاية يكون الناتج الحدى هو ميل $\left(\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}}\right)$ منحنى الناتج الكلى ويمثل الميل تقريب الناتج الحدى .

وخلاصة القول أنه يمكن إيجاد الناتج الحدى عند أى نقطة على منحنى الناتج الكلى بميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة . ويصل الناتج الحدى إلى أقصاه عندما يصل ميل المماس إلى أشد ما يكون عليه من الانحدار . ويتحقق أقصى ناتج حدى عند مستوى أقل من المدخل المتغير عن المستوى الذى يتحقق عنده أقصى ناتج متوسط ويتساوى الناتج الحدى مع الناتج المتوسط عندما يصل الأخير إلى نهايته العظمى .

الناتج الكلى ، والمتوسط ، والحدى :

يصور الشكل (٥ ـ ٧) العلاقات التى ناقشناها حتى الآن بصدد الحديث عن مراحل الإنتاج .. ويوضح هذا الشكل العلاقة بين الناتج الحدى والمتوسط وبينهما وبين الناتج الكلى .

ولننظر أولا إلى منحنى الناتج الكلى لنلاحظ أن إضافة مقادير صغيرة من المدخل المتغير تؤدى إلى زيادة تدريجية فى الإنتاج الكلى . ويبدأ الناتج فى الارتفاع السريع عند المستويات المنخفضة من المدخل ثم يصل إلى أقصى انحدار



الشكل (٥-٧)

منحنيات الإنتاج : الكلى والمتوسط والحدى

(أو معدل الزيادة) عند النقطة « ١ » وحيث أن ميل منحنى الناتج الكلى يساوى الناتج الحدى فإن أقصى انحدار (النقطة واحد) لا بد وأن تتفق مع نقطة النهاية العظمى لمنحنى الناتج الحدى (نقطة أربعة) .

وبعد أن يصل الميل إلى أقصاه عند النقطة واحد ، يستمر منحنى الناتج الكلى فى الارتفاع . . ولكن الانتاج يزيد بمعدل متناقص ومن ثم يكون الميل أقل انحدارا . وإذا تحركنا تجاه الخارج على طول المنحنى من النقطة واحد فاننا نصل إلى نقطة يكون عندها الخط الممتدمن نقطة الأصل مماسا لمنحنى الناتج الكلى (النقطة اثنين) . ولما كان تماس هذا المحور مع المنحنى يحدد حالة النهاية العظمى للناتج المتوسط . فان النقطة اثنين تقع أعلى النقطة خمسة مباشرة .

وكلما توسعنا فى استخدام المزيد من المدخل المتغير عن مقداره عند النقطة اثنين كلما استمر الناتج الكلى فى الزيادة . ولكن المعدل الذى يزيد به يتدرج فى الإنخفاض حتى تصل فى النهاية إلى النقطة ٣ . وعند هذا الوضع يصل الناتج الكلى إلى أقصاه . ثم ينخفض بعد ذلك إلى أن يصل إلى الصفر مرة أخرى . وقد يثبت الانتاج الكلى عند مستوى معين لمرحلة قصيرة حول النقطة ثلاثة فلا يتغير مع إضافة مدخلات ، ويكون ميل منحنى الناتج الكلى عندئذ مساويا للصفر • ومن ثم يكون الناتج الحدى صفر . وتظهر هذه الحقيقة بوضوح بالنظر إلى الشكل (٥ ـ ٧) لنجد أن النقط ثلاثة وستة تتحقق عند استخدام نفس القدر من المدخل المتغير . وحيث أن الناتج الكلى يبدأ فى الإنخفاض بعد النقطة ثلاثة ، فان الناتج الحدى يصبح سالبا .

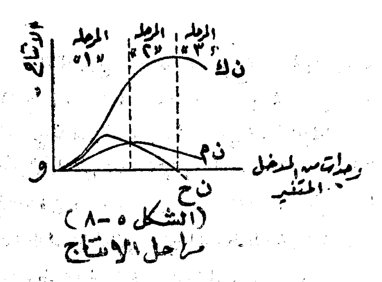
ويلاحظ أن معظم العلاقات الهامة التى ناقشناها حتى الآن اعتمدت على الاشارة إلى منحنى الناتج الكلى . غير أنه يمكن أبقاء الضوء على علاقات معينة بالنظر إلى منحنيات الناتج المتوسط والناتج الحدى المبينة بالشكل (٥ ـ ٧) .

فالناتج الحدى يبدأ أولا فى الزيادة ويصل إلى أقصاه عند النقطة أربعة (وهى نقطة تناقص الغلة) ثم ينخفض بعد ذلك . ويصبح سالبا بعد الوصول إلى النقطة ستة التى يصل عندها الناتج الكلى إلى أقصاه .

كذلك فان الناتج المتوسط يبدأ أولا فى الزيادة ليصل إلى أقصاه عند النقطة خمسة حيث يتعادل عندها الناتج الحدى والناتج المتوسط ، وتتناقص بعد ذلك إلى أن يصل إلى الصفر عندما يصل الناتج الكلى نفسه إلى الصفر . وأخيراً يلاحظ أن الناتج الحدى يزيد على المتوسط عندما يتزيد الناتج المتوسط ويقل عنه عندما يتناقص .

مراحل الإنتاج الثلاث :

وتحدد العلاقات القائمة بين النواتج الكلية والمتوسطة الحدية ثلاث مراحل للانتاج على النحو المبين بالشكل (٥ ـ ٨) .



(الشكل ٥ – ٨)
مراحل الإنتاج

وتغطى المرحلة الأولى المسافة من وحدات المدخل المتغير التى يزيد فيها الناتج المتوسط . وبعبارة أخرى فان المرحلة الأولى تقابل مرحلة تزايد متوسط غلة المدخل المتغير . ولكن ، كما سنوضح فيما بعد ، يصاحب تزايد متوسط غلة

المدخل المتغير غلة حدية سالبة للمدخل الثابت . وعليه يكون المدخل الثابت موجود بنسب كبيرة غير اقتصادية بالنسبة للمدخل المتغير فى المرحلة الأولى . ولا يتوقع أن يعمل المنتج الرشيد فى مجال الانتاج هذا. فاذا فرضت ظروف السوق أن يكون مستوى الانتاج صغير هكذا ، يتعين أن تتم عملية الانتاج باستخدام وحدات أقل من المدخل الثابت — وستنتقل مجموعة منحنيات الانتاج من وضعها المبين بالشكل ٥ — ٨).

كذلك لا يمكن أن تتم العملية الانتاجية فى المرحلة ٣ ذلك لأن الناتج الحدى يكون سالباً فى هذه المرحلة حيث الناتج الكلى يتناقص . فاضافة وحدات من المدخل المتغير خلال هذه المرحلة من الانتاج يؤدى إلى انخفاض فى الناتج الكلى . حتى لو كانت وحدات المدخل المتغير بدون مقابل ، فلن يقدم المنتج الرشيد على استخدامها لنقطة أبعد من نقطه صفرية الناتج الحدى لأن استخدامها يستتبعه انخفاض فى الناتج الكلى . فاذا اقتضت ظروف السوق التوسع فى الانتاج ، يتعين استخدام وحدات إضافية من المدخل الثابت ، ومن ثم تنتقل مجموعة منحنيات الانتاج إلى أعلى (كما هو مبين بالأشكال (٥ — ٣) ، (٥ — ٤)) .

وفى المرحلة الثالثة يمزج المدخل المتغير مع المدخل الثابت بنسب كبيرة غير اقتصادية . ففى مجال الزراعة ، تستخدم الأرض بكثافة شديدة . والحقيقة أن نقطة صفرية الناتج الحدى للمدخل المتغير تسمى حد الكثافة INTENSIVE MARGIN أى النقطة التى يتعذر تخطيها مواصلة النشاط الاقتصادى فى ظل الأحوال السوية . كذلك فان زراعه الأرض تكون انتشارية بمعنى استخدام أراضى واسعة) عند نقطة النهاية العظمى للناتج المتوسط للمدخل المتغير . وتسمى نقطة أقصى ناتج متوسط للمدخل المتغير بحد الانتشار أو التوسع .
EXTENSIVE MARGIN

وباسقاط المراحل ١ و ٣ من الاعتبار ، يتعين قيام الانتاج فى المرحلة ٢

بين حد الكثافة وحد التوسع أو فى المسافة بين أقصى ناتج متوسط المدخل المتغير وبين صفرية الناتج الحدى . فاذا تعين انتاج كميات تختلف عن نطاق المرحلة ٢ ، فلا بد من تغير كمية المدخل الثابت . فاذا أريد انتاج صغير يجب تخفيض وحدات المدخل الثابت ، أما إذا كانت هناك رغبة فى انتاج كبير فلا سبيل إلى تحقيقها إلا بزيادة المدخل الثابت .

اتساق وتماثل مراحل الانتاج

إن مراحل الانتاج متماثلة سواء نظرنا إليها من زاوية المدخل المتغير أو من المدخل الثابت . ويفسر ذلك بتطابق تزايد الغلة المتوسطة للمدخل المتغير مع سلبية الغلة الحدية للمدخل الثابت .

ويبين الجدول (٥ – ٢) إعادة لصياغة المثال الذى طرحناه سابقا بالجدول (٥ – ١) وفيه نفترض أن ثمان مزارع مساحة كل منها ثلاثة أفدنة تزرع فى نفس الوقت . وتستخدم عامل واحد فى المزرعة الأولى ، وعاملين بالمزرعة الثانية وثلاثة بالثالثة وهكذا يتزايد عدد العمال لنجد أن ثمانية عمال يعملون بالمزرعة الثامنة . ويبين الجدول (٥ – ٢) الانتاج الكلى والمتوسط والحدى للعمل (المدخل المتغير) المستخدم فى هذه التجربة :

ويمكن استخدام هذا الجدول [(٥ – ٢)] فى استخراج الناتج الكلى والحدى الضمنى للارض (المدخل الثابت) .

ويلاحظ من الصف الأخير بالجدول أن ثمانية عمال يفلحون ثلاثة أفدنة وينتجون

جدول (٥ — ٢)

الناتج الكلي والمتوسط والحدي للعمل في زراعة قطع من الأرض مساحة كل منها ثلاثة أفدنة

عدد الأفدنة	عدد العمال	نسبة الأرض إلى العمل	الناتج الكلي (للعمل)	الناتج المتوسط (للعمل)	الناتج الحدي (للعمل)
٣	١	١/٣	١٠	١٠	—
٣	٢	٢/٣	٢٤	١٢	١٤
٣	٣	٣/٣	٣٩	١٣	١٥
٣	٤	٤/٣	٥٢	١٣	١٣
٣	٥	٥/٣	٦١	١٢ر٢	٩
٣	٦	٦/٣	٦٦	١١	٥
٣	٧	٧/٣	٦٦	٩ر٤	صفر
٣	٨	٨/٣	٦٤	٨	—٢

منها ٦٤ وحدة من الإنتاج . ويزرع كل عامل فى المتوسط $\frac{٣}{٨}$ فدان من الأرض. لهذا عندما يكون هناك عامل واحد يفلح $\frac{٣}{٨}$ فدان فإن الناتج الكلى فى هذه الحالة يعادل $\frac{١}{٨}$ الناتج الذى يحصل عليه ثمانية عمال يفلحون ثلاثة أفدنة(١) . لذلك ، فان الناتج الكلى نقطة مساحتها $\frac{٣}{٨}$ فدان يعمل عليها عامل واحد هو $\frac{١}{٨}$ × ٦٤ وحدة أى ثمان وحدات .

كذلك يلاحظ من الصفين قبل الأخير بالجدول (٥ ـ ٢) تعطى ثلاثة أفدنة يعمل بها ٧ عمال ٦٦ وحدة من الإنتاج. لذلك ، فإن $\frac{٣}{٧}$ فدان من الأرض يعمل عليها عامل واحد تعطى $\frac{١}{٧}$ هذا الإنتاج أو $\frac{١}{٧}$ × ٦٦ والتى تساوى ٩٫٤ وحدة . وبالاستمرار على هذا النسق من أسفل الجدول إلى أعلاه يمكننا تحديد الناتج الكلى للأرض كما يظهر فى العمود الرابع من الجدول (٥ ـ ٣) . ويجب ملاحظة أن طريق الحساب تتضمن بالضرورة أنه لكل نسبة من الأرض ـ العمل، فإن الناتج الكلى للأرض هو نفسه الناتج المتوسط للعمل .

---

(١) ويصح ذلك عندما يكون الإنتاج عرضة لثبات الغلة
CONSTANT RETURNS TO SCALE
ويعنى ذلك أنه إذا ضربنا المدخل فى عدد م (سواء كان صغيراً أم كبيراً) فإن الإنتاج يتضاعف بمقدار م كذلك . وبعبارة أخرى تتضمن ثبات الغلة أن عاملين يزرع كل منهما فدان واحد من الأرض يعطون نفس الناتج الكلى الذى يعطيه عاملين يعملون معا فى زراعة فدانين .

وبالتعبير الرياضى يجب أن تكون دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى فى حالة ثبات الغلة . فالدالة المتجانسة من الدرجة الأولى هى بالتعريف : إذا كانت ط = د (س ، ص) فإن د (م س ، م ص) = م د (س ، ص) = م ط وهذا هو بعينه المقصود بثبات الغلة .

جدول (٥ — ٣)

النواتج الكلية والمتوسطة والحدية عند زراعة

قطع الأرض المختلفة بواسطة عامل واحد

عدد الأفدنة	عدد العمال	نسبة الأرض للعمل	الناتج الكلي (للأرض)	الناتج المتوسط (لكل فدان من الأرض)	الناتج الحدي (لكل فدان من الأرض)
٨/٣	١	٨/٣	٨	٣ر٢١	—
٧/٣	١	٧/٣	٤ر٩	٦ر٢٢	١ر٢٦
٦/٣	١	٦/٣	١١	٢٢	٤ر٢٢
٥/٣	١	٥/٣	٢ر١٢	٨ر٢٠	١٢
٤/٣	١	٤/٣	١٢	٣ر١٧	٣ر٥
٣/٣	١	٣/٣	١٣	١٣	صفر
٢/٣	١	٢/٣	١٢	٨	٢—
١/٣	١	١/٣	١٠	٣ر٣	١ر٣ـ

بعد ذلك يمكن تحديد الناتج الحدى للفدان . ففى الجدول (٥ — ٣) نلاحظ أنه عندما تغيرت كمية الأرض من $\frac{٣}{٨}$ فدان إلى $\frac{٣}{٧}$ فدان زاد الناتج الكلى للأرض من ٨ إلى ٩٫٤ أى بزيادة قدرها ١٫٤ وحدة . ولقد زاد المدخل الثابت بالمقدار ($\frac{٣}{٧}$ — $\frac{٣}{٨}$) أى بزيادة قدرها $\frac{٣}{٥٦}$. لهذا فإن الناتج الحدى للفدان الإضافى عند هذا المستوى من المدخل الثابت هى ١٫٤ ($\frac{٥٦}{٣}$) = ٢٦٫١ . كذلك فإنه عند زيادة وحدات المدخل الثابت من $\frac{٣}{٧}$ فدان إلى $\frac{٣}{٦}$ فدان يزيد الناتج الكلى من ٩٫٤ إلى ١١ أى بزيادة قدرها ١٫٦ . ولهذا فإن الناتج الحدى هو ١٫٦ ($\frac{٤٢}{٣}$) = ٢٢٫٤ .

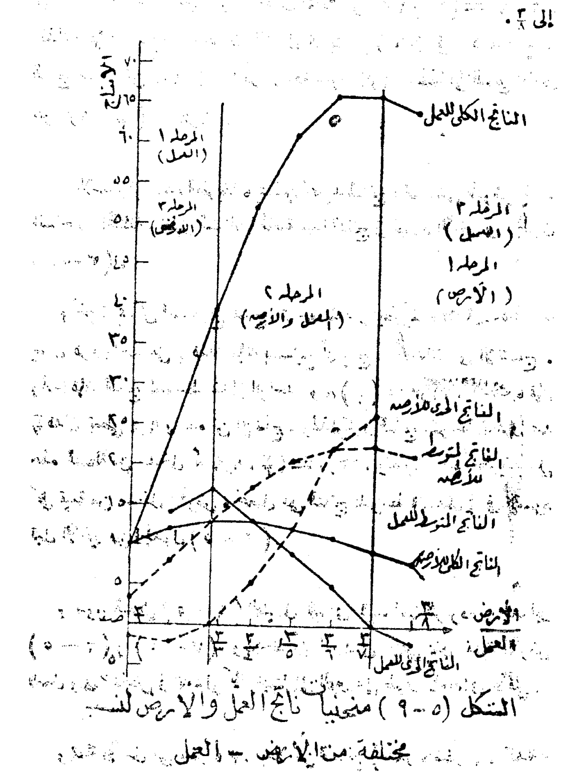
وبالاستمرار بهذه الطريقة ، يمكن تحديد الناتج الحدى للأرض ذات المساحات المختلفة وتظهر البيانات الخاصة بهذا الناتج فى العمود الأخير فى الجدول (٥ — ٣) .

وأخيراً يمكن استخراج الناتج المتوسط للفدان بطريقة مشابهة . فعندما يعمل فرد واحد على $\frac{٣}{٨}$ فدان فإنه يستطيع أن ينتج ٨ وحدات من الإنتاج . ولهذا فإن الناتج المتوسط للفدان الواحد هو ٨ ($\frac{٨}{٣}$) = ٢١٫٣ . كذلك ، فإن $\frac{٣}{٧}$ فدان تعطى ٩٫٤ وحده من الإنتاج . ولهذا يكون الناتج المتوسط للفدان عند هذه النقطة من المدخل هو ٩٫٤ ($\frac{٧}{٣}$) = ٢٢٫٦ . وتطبيق هذه الطريقة على كل قيمة من مدخل الأرض ، نحصل على الناتج المتوسط للفدان (فى العمود قبل الأخير من الجدول (٥ — ٣) .

ويصور الشكل (٥ — ٩) التمثيل البيانى للبيانات الواردة بالجدولين (٥ — ٢) و (٥ — ٣) . ويلاحظ أن الأحداثى الأفقى يمثل نسبة الأرض للعمل وهى تتناقص فى المقدار كلما اتجهنا إلى اليمين على طول الأحداثى الأفقى .

ونقطة الأصل هى صفر ، ٣ . بدلا من الشائع (صفر ، صفر) . كذلك

يوجد اختلاف فى مقياس الرسم على الاحداثى الأفقى . فعادة تمثل المسافة الواحدة تغيراً لمتغير لوحدة . لهذا فإن المسافة من ١ إلى ٢ هى نفس المسافة من ٧ إلى ٨ ولكن وحدة المسافة فى هذا الشكل تقيس وحدة التغير فى مقام الكسر حيث يظل البسط ثابتاً . ولهذا فإن المسافة بين ٣/١ ، ٣/٢ هى نفس المسافة من ٣/٧ إلى ٣/٨ .



الشكل (٥ - ٩) منحنيات ناتج العمل والأرض لنسب مختلفة من الأرض ← العمل

ويلاحظ أولا أن منحنيات الناتج الكلى والمتوسط والحدى للعمل (والمبينة بالخطوط المتواصلة) هى نفسها منحنيات الناتج المبينة بالشكل (٥ — ١) و (٥ — ٢) وتنتهى المرحلة الأولى للعمل عند نقطة يصل فيها الناتج المتوسط للعمل إلى أقصى قدر . كذلك فإن المرحلة الثالثة للعمل تبدأ عند النقطة التى يصل فيها الناتج الحدى للعمل إلى الصفر (ويصل الناتج الكلى إلى أقصاه) . ويظهر نفس الإيضاح فى الشكل (٥ — ١٠) ، الجزء أ والتى تمثل حالة أكثر عمومية ومستمرة .

الشكل (٣ — ١٠)

تماثل مراحل الإنتاج

وتمثل الخطوط المتقطعة فى الشكل (٣ — ٩) الناتج المتوسط والناتج الحدى للأرض (والناتج الكلى للأرض هو نفس الناتج المتوسط للعمل) . ويوضح الشكل (٥ — ٩) و (٥ — ١٠) التماثل فى مراحل الإنتاج الثلاث فالناتج الحدى للأرض يكون سالبا فى أول الأمر ويصل إلى الصفر عندما يصل

الناتج الكلي للأرض (الناتج المتوسط للعمل) إلى أقصاه . ولهذا فإن النسبة المرتفعة للأرض — العمل تحدد المرحلة الثالثة وهى المنطقة التى يكون فيها الناتج الحدى للأرض سالب . كذلك فإن الناتج المتوسط للأرض يصل إلى أقصاه عند نفس نسبة الأرض — للعمل (ج/ب) تلك التى تخفض الناتج الحدى للعمل إلى الصفر . ولهذا فإن هذه النقطة تحدد المرحلة ١ للأرض والمرحلة ٣ للعمل .

والمرحلة ٢ هى نفس الشيء من كلا النظرتين وهى المرحلة التى يتم فيهما الإنتاج حقيقة . فمن وجهة نظر المدخل المتغير ، تقع المرحلة ٢ بين حدى التوسع والكثافة . ولكن ما يعتبر توسعاً بالنسبة للمدخل المتغير هو تكثيف بالنسبة للدخل الثابت والعكس صحيح . ولذلك فإن المرحلة ٢ من وجهة نظر المدخل الثابت تقع بين حدى الكثافة والتوسع .

القرار الرشيد فى المرحلة ٢ :

ليس هناك ثمة خطأ فى تناقص الغلة — فالناتج الحدى يتناقص فى المرحلة ٢ ولكنه موجب . كذلك فإن تناقص الغلة لا يعنى ضعف الكفاية . فالمنتج الرشيد دائماً يختار حجم الإنتاج فى المرحلة ٢ . ويتوقف حجم الإنتاج الذى يقرره فى هذه المرحلة على الأسعار . وفى غياب معلومات عن الأسعار لا يمكن الوصول إلى قرار بشأن تحديد حجم الإنتاج وهذا ما سنقدمه فيما بعد . ولكننا نكتفى هنا بأن نقرر أن حجم الانتاج الذى يقع عليه اختيار المنتج الرشيد سيكون فى المرحلة ٢ ولن يقدم منتج رشيد على الإنتاج فى المرحلة ٣ لأنه سينتج فى هذه الحالة أقل ويستخدم فى نفس الوقت وحدات أكثر من المدخل المتغير . ففى المرحلة الثالثة يوجد الكثير من عنصر العمل . حتى ولو كان العمل بدون مقابل فإن كمية العمل تكون أكثر من اللازم . ويحدد الفيصل بين المرحلة ٢ والمرحلة ٣ أحد حدود قرار الإنتاج الرشيد . فإذا كان العمل بدون مقابل وكان الإنتاج

مربحاً ، فإن حجم الإنتاج يصل إلى نهاية عظمى عند الطرف الأيمن من حدود المرحلة ٢ .

والحد الفاصل الآخر هو الذى يفصل بين المرحلة ١ والمرحلة ٢ . وعنده يصل الناتج المتوسط إلى أقصاه . ولنفرض أن أحد المنشآت تعمل فى المرحلة ١[1] وأن انتاجها مربح . فإذا كان الحال كذلك يصبح من الممكن زيادة أرباح هذه المنشآت بالتوسع فى الإنتاج لأن استخدام المزيد من وحدات المدخل سيزيد الإنتاج بنسبة أكبر . ولهذا فإن مثل هذه المنشآت يكون لديها الحافز باستمرار التوسع فى الإنتاج خلال المرحلة ١ وفى الحقيقة سينتهى بها التوسع فى الإنتاج إلى الخروج من هذه المرحلة[2] .

---

(١) يمكننا أن نبين أن هناك زيادة فى المدخل الثابت فى المرحلة الأولى . وتعنى الزيادة هنا أن الناتج الحدى سالب .

(٢) تنطبق هذه العبارة على المنشأة التى تعمل فى ظل ظروف المنافسة الكاملة والتى تبيع منتجاتها وتشترى المدخلات بأسعار ثابتة . ولكن فى حالة الاحتكار أو المنافسة المقيدة ، قد تجد المنشأة أن مستوى الانتاج الذى يحقق لها أعلى الأرباح يقع فى المرحلة ١ .

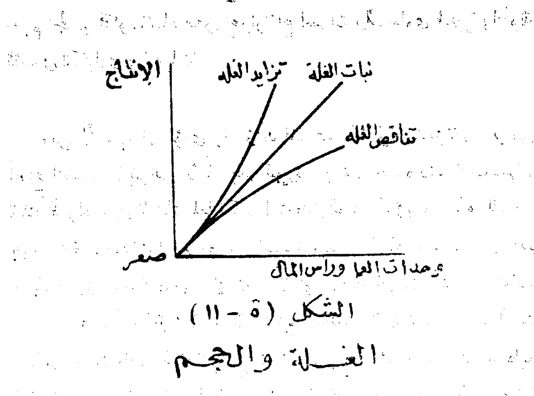
الغلة والحجم

يمكننا الآن طرح الفرض فى ثبات بعض المدخلات جانبا لبعض الوقت . وبناء على ذلك يمكن للمنشأة أن توسع فى إنتاجها (أى توسع من حجم عملياتها) بإستخدام المزيد من جميع المدخلات — المزيد من العمل ، والمزيد من المعدات، والمزيد من المساحة . فاذا كانت زيادة الانتاج متناسبة مع الزيادة فى كمية المدخلات فان العلاقة بين الغلة والحجم تكون ثابتة وتعرف هذه الحالة بثبات الغلة حيث يتضاعف الانتاج بمضاعفة المدخلات ، ولكن إذا كانت زيادة الانتاج أكثر من التناسب تكون العلاقة متزايدة الغلة . وإذا كانت الزيادة فى الانتاج أقل من التناسب تكون العلاقة متناقصة وتعرف بتناقص الغلة .

ولكن يجب إلا يغيب عن الذهن هنا : أن الكل منا يسمع عن وفورات الحجم أو مزايا الانتاج الكبير ومايشابهها من عبارات. والمشكلة أن هذه العبارات تحمل معانى عديدة بعضها لايتلاءم مع الموضوع الذى تناقشه هنا ويكون مصدرا للتشويش . فزيادة الكفاية التى تتميز بها وحدات الانتاج الكبيرة على الوحدات الصغيرة ترجع دائما إلى الحقيقة فى الوحدات الكبيرة تستخدم وسائل إنتاج أحدث وأفضل من وحدات الانتاج القديمة والصغيرة . ومع إدراكنا لاهمية تطور التكنولوجيا إلا أنها ليست جزءا من فكرة ارتباط الغلة بالحجم . فالفكرة ترتبط بمستوى معين من التكنولوجيا .

ويمكن توضيح فكرة العلاقة بين الغلة والحجم بالاستعانة بالشكل (٥-١١) حيث يقيس الأحداثى الأفقى وحدات العمل ورأس المال . وتتكون كل وحدة من كلا العمل ورأس المال : العمال ومعداتهم . ويقيس الأحداثى الرأسى الانتاج . وتعرض الثلاثة خطوط الموضحة بالشكل (٥ - ١١) العلاقات الثلاث بين

الانتاج والدخل تبعاً للحجم ويعرض الشكل المذكور هذه العلاقات الثلاث



الشكل (٥ - ١١)

الغـلة والحجم

منفصلة ولكن حقيقة الأمر أن المنشأة عندما تتوسع فى الحجم تمر أولا بمرحلة تزايد الغلة ثم تعايش مرحلة ثبات الغلة ثم مرحلة تناقص الغلة .

تزايد الغـلة : INCREASING RETURNS

من بين الأسباب التى تؤدى إلى تزايد الغلة علاقات بعدية تؤثر فى الحجم . فمضاعفة قطر ماسورة مياه يؤدى إلى زيادة المياه المتدفقة من خلالها بأكثر من الضعف . وسعة صندوق خشبى ابعاده ٣متر مكعب تزيد٢٧ مرة عن سعة صندوق أبعاده ١ متر مكعب ولكنه يحتاج إلى أخشاب تسعة أضعاف ما يحتاجه الصندوق الصغير . ومضاعفة كميه العمل ورأس المال المبذول فى انتاج أحد آلالات يزيد قوة هذه الالة بأكثر من الضعف . كذلك فان طاقة أحدالجرارات على استيعاب المزيد من الحمولة يزيد بمعدل أسرع من زيادة وزنه . ولكن يلاحظ أن بعد نقطة معينة تتوقف مثل هذه الزيادة فى كفاءة الحجم . فعند زيادة حجم الماسورة

أو الصندوق بعد حجم معين تحتاج إلى صنعها م مواد أثقل وأقوى . كذلك فان حجم الجرار محكوم باتساع الشوارع وارتفاع الممرات والكبارى العلوية والحمولة القصوى للكبارى والمعديات .

ومن الأسباب التى تؤدى إلى تزايد الغلة عدم القابلية للتجزئة . . فبعض أنواع المعدات لا يتوافر إلا بأحجام كبيرة . وهناك حدود دنيا لاحجامها . لذلك كلما زاد حجم المنشأة كلما أمكنها استخدام الحد الأدنى من هذه المعدات بل واستخدام معدات أكبر حجما وأعقد تصميما وأكفاء انتاجا . غير أن عدم القابلية للتجزئة مسألة درجة وليست مسألة نوع . فبالرغم من أننا لا نستطيع استخدام نصف آلة كاتبة إلا أننا لا نستطيع استئجار الآلة الكاتبة نصف الوقت بدلا من الوقت كله . كذلك لا يمكن أن نستخدم نصف محاسب ولكننا نستطيع استخدام خدمات المحاسب لبعض الوقت . ولذلك تستنفذ عدم القابلية للتجزئة أغراضها كسبب يؤثر فى تزايد الغلة .

ومن الأسباب الأخرى التى تحدث تزايد فى الغلة مع زيادة الحجم ، ارتفاع درجة التخصص . فعلى ضوء زيادة عدد العمال يمكن للمنشأة أن تقسم الأعمال بينهم فيتخصص كل منهم فى عمل معين بذاته وبذلك تزيد كفاءة العمل فان زيادة الآلات والمعدات يمكن للمنشأة من شراء أنواع متخصصة تقوم كل آلة منها بأنواع نمطية من الانتاج .

ولا شك أن التخصص يرفع من كفاءة المدخلات . فالتخصص يوفر الوقت الضائع فى الانتقال من وظيفة أو عمل ما إلى وظيفة أو عمل آخر . كذلك يفتح التخصص المجال أمام كل ذى كفاءة أن يختار العمل الذى يتناسب مع مواهبه وقدراته . كذلك فان التركيز على عمل من الأعمال يفسح المجال أمام من يؤديه إلى البحث والتعمق فيه وتطويره وابتكار وسائل جديدة فى آدائه . . كل هذه

وغيرها ترفع من كفاءة الآداء وتؤدى إلى زيادة إنتاجية المدخل . ومن ثم تتزايد الغلة . ولن يكون المجال مفتوحاً أمام تقسيم العمل والتخصص فى عمل معين بذاته إذا كان حجم الأعمال صغيراً .. فصاحب المشروع الصغير قد يقوم بنفسه بالادارة والعمل اليومى بل وكل العمليات الأخرى التى تخصص بنشاط مشروعه . ولكن عندما يكبر حجم المنشأة وتزيد كمية المدخلات المستخدمة يصبح التخصص وتقسيم العمل ضرورة ويزيد بذلك الناتج من وحدة المدخل فى وحدة الزمن .

ثبات الغـــلة CONSTANT RETURN TO SCALE

إن مراحلة تزايد الغلة لن تستمر إلى ما لا نهاية مع زيادة حجم الانتاج . فبعد أن تصل المنشأة إلى حجم معين تبدأ فى الدخول فى مرحلة ثبات الغلة ، ومن ثم فاذا ضاعفت مدخلاتها فى هذه المرحلة فانها تضاعف من انتاجها كذلك .

وتمر المنشأة بمرحلة ثبات الغلة (وهى مرحلة قد لا تمتد طويلا) قبل أن تصل إلى مرحلة تناقص الغلة . وتؤكد المشاهدات وتجارب الحياة العملية أن مرحلة ثبات الغلة مرحلة طويلة تشمل مجالا واسعا من أحجام الانتاج . فاذا استطاعت المنشأة أن تتغلب على ضعف الكفاية الانتاجية الناشىء عن صغر حجم عملياتها فانها ستحقق غلة تتزايد بمعدلات صغيرة . وإذا كان الانخفاض فى تناقص الغلة غاية فى الصغر فانه يمكن اعتبار أن الغلة ثابتة مع تزايد الانتاج . ويلاقى هذا الافتراض ترحيبا من الناحية العملية ويعتبر بحق تبسيطاً للتحليل النظرى . وغالبا ما يستخدم الاقتصاديون التعبير الرياضى عند الإشارة إلى ثبات الغلة . فتسمى دالة الانتاج التى تعرض ثبات الغلة بدالة متجانسة خطية أو متجانسة من الدرجة الأولى . ومن أمثلتها دالة الانتاج التى تعرف بدالة كـــوب دوجلاس COBB-DOUGLAS

تناقص الغـــلة DECREASING RETURNS

ولكن ، هل يمكن للمنشأة أن تستمر إلى ما لا نهاية فى مضاعفة مدخلاتها ويتمكن بذلك من مضاعفة الإنتاج ؟ والحقيقة أن الإجابة التى لا يختلف عليها اثنان ، بالنفى . فلا بد أن تصل المنشأة إلى مرحلة تناقص فيها الغلة بزيادة الإنتاج . ويتعين فى هذه الحالة البحث عن السبب من وراء ذلك ، وهناك اتفاق حول هذه النقطة حتى من الوجهة النظرية الموضوع . فيقرر بعض الاقتصاديين أن التنظيم نفسه إن هو إلا عامل ثابت من عوامل الإنتاج — فى حين يمكن زيادة المدخلات الأخرى ، لا يمكن زيادة عنصر التنظيم . فالقرارات التى يتخذها المنظم غير قابلة للتجزئة ومن ثم فهى غير قابلة للزيادة . ومن هذه الوجهة ، تعتبر مرحلة تناقص الغلة ، خاصة من حالات النسب المتغيرة . ويعتقد بعض الاقتصاديين الآخرين أن تناقص الغلة يظهر نتيجة من المشاكل التى تتراكم مع زيادة الحجم وخاصة تلك المشاكل والصعوبات الخاصل بالتنسيق والإشراف والسيطرة على أعمال المنشأة .

وبعض الخدمات التى تقدمها إدارة الحكم المحلى فى مدينة من المدن قد تكون عرضة لتناقص الغلة فإذا كانت المدينة التى يسكنها مليون نسمة تحتاج إلى عدد من رجال الشرطة لكل ألف نسمة أكبر مما تحتاجه المدينة التى يقطنها ١٠٠ ألف نسمة ، فان هناك تناقص فى الغلة ، إذا كانت نوعية الخدمات التى يقدمها رجال الشرطة فى كلا المدينتين واحدة أو متشابهة . وينطبق نفس الشىء بالنسبة لخدمة الصحة واطفاء الحريق ، وصيانه الشوارع والطرق العامة وغيرها من الخدمات العامة . ويكون الزحام والإكتظاظ هو السبب الرئيسى رواء تناقص الغلة .

الفصل السادس

الانتاج باستخدام مدخلين متغيرين

لقد كان التصور الذى عرضناه حتى الآن أن المنشأة تستطيع زيادة الإنتاج إما باستخدام المزيد من أحد المدخلات أو المزيد من المدخلات كلها ، ولكننا سنوجه العناية الآن على المنشأة التى تتوسع فى إنتاجها عن طريق استخدام المزيد من مدخلين كل منهما بديل للآخر .

ويلاحظ أننا عرضنا تحليل سلوك المستهلك فى الفصل الأول باستخدام قانون تناقص المنفعة الحدية ، وفى الفصل الثانى باستخدام مجموعة من منحنيات السواء ونظرية الإنتاج متماثلة ، ذلك لأنه يمكن تطوير العلاقة بين المدخلات والمخرجات (الإنتاج) باستخدام منحنى واحد لتناقص الإنتاجية الحدية وكذلك باستخدام مجموعة من المنحنيات تشبه منحنيات السواء .

ويمكننا أن نتصور دالة الإنتاج على أنها تتكون من حجم معين من المدخلات الثابتة ومدخلين متغيرين ، ومثال ذلك الجدول التالى الإنتاج الذى يمكن الحصول عليه باستخدام مجموعة مختلفة من مزيج المدخلين المتغيرين .

ونبدأ قراءة الجدول من أسفل الركن الأيسر وننتقل إلى أعلى تجاه اليمين . فلو تصورنا مثلا أن المدخل الثابت هو مقص آلى والإنتاج هو ألواح خشبية فان الجدول (٦ — ١) يبين لنا أن عاملين يستخدمان عدد ٢ مقص آلى يعطيان ١٠ ألواح خشبية فى اليوم وأربعة عمال وأربعة مقصات ينتجان ٢٠ لوح

خشبي فى اليوم . وهكذا . لذلك فان الأرقام الواردة بالجدول تعرض حالة ثبات الغلة — فاذا ضاعفنا المدخلين معا تضاعف الإنتاج (قد يتساءل القارىء

جدول (٦ — ١)

أحجام الانتاج المختلفة التى يمكن الحصول عليها
باستخدام مجموعات مختلفة من المدخلين المتغيرين

عــدد الآلات (مقص آلى)	الانتـــاج		
٦	١٦	٢٤	٣٠
٤	١٤	٢٠	٢٤
٢	١٠	١٤	١٦
عــدد العمال	٢	٤	٦

كيف يستخدم عاملين ٤ مقصات أو أكثر أو كيف يمكن أن يستخدم أربعة عمال أو أكثر مقصين فقط . ولكن الحقيقة أن قطع الأخشاب يتضمن أعمال أخرى بخلاف استخدام المقصات ، مثل إزالة نشارة الخشب من الطريق وتجميع الألواح الخشبية والعناية بالمقصات والحفاظ على أسنانها حادة ، وغيرها من الأعمال الأخرى) فاذا قرأنا العمود من أسفل إلى أعلى أو بالتقاطع مع الأعمدة الأخرى ، فالواضح أن الزيادة فى الانتاج تظهر أقل من التناسب مع زيادة المدخل . فباستثناء القطر الممتد من أسفل اليسار إلى أعلى اليمين تكشف القراءات الأخرى بالجدول عن وجود تناقص فى الانتاجية الحدية ، لذلك فان الجدول (٦ — ١) يعطى مثالا لوجود حالة ثبات الغلة جنباً إلى جنب مع تناقص الناتج الحدى لنفس دالة الانتاج .

وعموماً ، فإن دالة الانتاج ذات الغلة الثابتة تعرض تناقص الناتج الحدى نتيجة لزيادة أحد المدخلات مع ثبات المدخل الآخر . وفى دالة الانتاج التى تعرف بدالة كوب دوجلاس فإن الزيادة فى كل من العمل ورأس المال بنسبة ١٠٪ يصاحبه زيادة فى الانتاج بمقدار ١٠٪ كذلك ولكن إذا زاد إحدهما (العمل أو رأس المال) بنسبة ١٠٪ بينما يظل الآخر ثابتاً فإن الانتاج يزيد بنسبة أقل ١٠٪ وعلى كل فإنه يمكن كتابة دالة الانتاج ذات الغلة الثابتة بطريقة تبين أنه على امتداد مرحلة من مراحل الانتاج على الأقل سوف يزيد الناتج الحدى لأحد المدخلات .

منحنيات سواء الإنتاج

ISOQUANTS

يمكن تمثيل دالة الإنتاج ذات مدخلين متغيرين بمجموعة من منحنيات سواء الإنتاج . وتعنى عبارة سواء الإنتاج كميات متساوية . وتظهر مثل هذه المنحنيات على النحو المبين بالشكل (٦ – ١) . وكما يبدو من الشكل فإن منحنيات سواء الإنتاج تشبه منحنيات السواء التى سبق عرضها فى تحليل سلوك المستهلك . والواضح أننا وضعنا رقم أمام كل منحنى سواء الإنتاج ويدل كل رقم على عدد وحدات الإنتاج فالرقم ١٠ يعنى ١٠ وحدات من الإنتاج ويبين المنحنى المجموعات المختلفة من مزيج وحدات العمل ووحدات رأس المال التى يمكن استخدامها فى إنتاج عشر وحدات من الانتاج . وتبين النقطة أ على المنحنى أن ١٠ وحدات من الإنتاج يمكن الحصول عليها باستخدام عدد « ع » من وحدات العمل وعدد « م » من وحدات رأس المال وتشير النقطة «ب» أنه يمكن الحصول على نفس حجم الإنتاج باستخدام عدد «ع» من وحدات العمل و « م » من وحدات رأس المال . وتبين المنحنيات رقم ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ المجموعات المختلفة من مزيج وحدات العمل ورأس المال التى تعطى ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ وحدة من الإنتاج .

ويمكن للقارىء أن يتصور فى مخيلته منحنيات أخرى لسواء الإنتاج غير التى تبدو ظاهرة فى الشكل (٦ — ١) ويعرض شكل منحنيات سواء الإنتاج امكانية الاحلال بين المدخلين . فإذا كان المدخلين بديلين كاملين فإن منحنيات سواء الإنتاج تكون على شكل خطوط مستقيمة وإذا كان كل منهما بديل جيد للآخر فإن سواء الإنتاج تكون منحنية انحناءه هادية (مثلما تظهر بالشكل (٦ — ١) أما إذا كان المدخلين بديلين ضعيفين فان سواء الإنتاج ينحنى

انحناءة حادة .. أما إذا كانت المدخلات لا تستخدم إلا بنسبة ثابتة فإن منحنى سواء الإنتاج يكون زاوية قائمة .

الشكل (٦ - ١) دالة الإنتاج - سواء الإنتاج

ميل منحنى سواء الإنتاج

أن ميل منحنى سواء الإنتاج عند نقطة معينة هو معدل استبدال أحد المدخلات بمدخل آخر عند هذه النقطة . ويقاس الميل هنا بالقيمة المطلقة للميل أى أننا نتجاهل الإشارة السالبة لميل منحنيات سواء الإنتاج . ويعرف معدل الاستبدال هذا بمعدل الإحلال الفنى الحدى « م ح ف ح » . فإذا انتقلنا قليلا إلى أسفل منحنى سواء الانتاج حيث نستبدل مقدار صغير من رأس المال بمقدار صغير من العمل ، وفى ضوء التعريف فى ثبات حجم الانتاج على منحنى سواء الانتاج ، فان الزيادة فى الانتاج التى نحصل عليها من استخدام المزيد من العمل تساوى الخسارة فى الانتاج الناشئة عن خفض حجم رأس المال المستخدم . والزيادة فى الانتاج هى الناتج الاضافى للعمل أى الناتج الحدى للوحدات المضافه من العمل (الناتج الحدى للعمل ن ح ع × △ ع) .

والخسارة فى الانتاج هى الناتج الحدى المضحى به من خفض وحدات رأس المال (ن ح م × △ م) .

لذلك فإن :

الميل = م ح ف = $\frac{\triangle م}{\triangle ع}$

والخسارة فى الانتاج = الزيادة فى الانتاج .

△ × ن ح م = △ ع × ن ح ع

إذا ، $\frac{\Delta م}{\Delta ع} = \frac{ن ح ع}{ن ح م}$

ولهذا فان ميل سواء الانتاج عند أى نقطة يساوى نسبة الناتج الحدى للعمل بالنسبة للناتج الحدى لرأس المال .

ولمزيد من الايضاح يستطيع القارىء العودة إلى الشكل (٢ — ٩) إذ يبين الرسم أن ميل منحنى سواء المستهلك يساوى المنفعة الحدية للسلعة «س» مقسومة على المنفعة الحدية للسلعة «ص» . وينطبق نفس المنطق على منحنيات سواء الانتاج . ففى الشكل (٢ — ٩) يمكن قراءة رأس المال والعمل على الأحداثين بدلا من « س ، ص » ونستخدم الناتج الحدى بدلا من المنفعة الحدية .

ومعدل الاحلال الفنى الحدى متناقص ومنحنيات سواء الانتاج محدبة تجاه نقطة الأصل . ويعنى الانتقال أسفل سواء الانتاج أنه بزيادة وحدات إضافية من العمل نستغنى عن وحدات أقل فأقل من رأس المال كى نحافظ على نفس المستوى من الانتاج . كذلك فاننا بالانتقال أعلى المنحنى فاننا نستغنى عن وحدات أقل فأقل من العمل لتحل محلها حجم معين من وحدات رأس المال .
ويعادل تحدب منحنيات سواء الانتاج تناقص الغلة . فالانتقال إلى أسفل المنحنى يبين أن استخدام المزيد من العمل نظير التنازل عن مقدار أقل من رأس المال يصاحبه إنخفاض فى الناتج الحدى للعمل . وتعمل قوتين فى هذه الحالة :

* الأولى : أنه عند استخدام المزيد من العمل مع مقدار ثابت من رأس المال يتناقص الناتج الحدى للعمل .

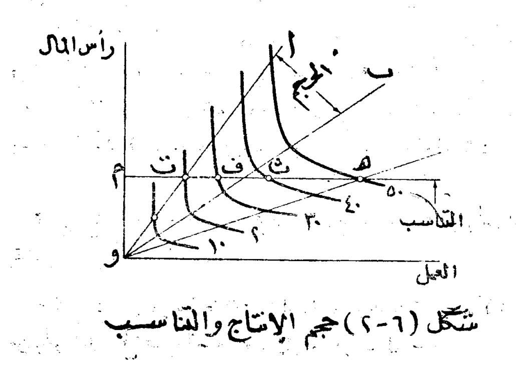
والثانية : تكمن وراء الحقيقة فى أن استخدام المزيد من العمل مع كمية أقل من رأس المال يدفع الناتج الحدى للعمل إلى التناقص بمعدل أسرع .

وتعنى تناقص الغلة كذلك من الناحية الأخرى أنه إذا استخدمنا مقدار أقل من أحد المدخلات فان الناتج الحدى لهذا المدخل يزيد ولهذا فان الانتقال إلى أسفل سواء الانتاج يعنى أن الناتج الحدى لرأس المال يتزايد لأننا نستخدم قدرا أقل منه مع مزيد من العمل .

حجم الانتاج ومعدلاته :

يمكن استخدام منحنيات سواء الانتاج فى توضيح أو التمييز بين حجم الانتاج ومعدل الانتاج بالنسبة لتغير مقدار المستخدم من المدخلات . ولقد سبق أن تعرضنا إلى هذه النقطة فى الفصل السابق عند الحديث عن تزايد وثبات وتناقص الغلة ولكننا نفضل إعادة التأكيد عليها باستخدام منحنيات سواء الانتاج .

ويوضح الشكل (٦ — ٢) منحنيات سواء للإنتاج فى ظل ثبات الغلة . وتتقاطع هذه المنحنيات (١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ... الخ .) مع الخطوط المستقيمة « و أ ، و ب ، و حـ » عند مسافات متساوية . ولهذا فاننا نحتاج فى إنتاج ٢٠



شكل (٦-٢) حجم الإنتاج والتناسب

وحدة إلى ضعف مقدار رأس المال والعمل المطلوب لانتاج ٠، وحدات فقط ، و ٥٠ ٪ زيادة لانتاج ٣٠ وحدة بدلا من ٢٠ وحدة وهكذا . وتتضح هذه الحقيقة على طول الخطوط المستقيمة و أ ، و ب ، و ح أو أى خط مشابه . وتدل هذه الخطوط على نسب معينة من رأس المال إلى العمل فميل الخط و أ والذى يساوى $\frac{٢}{١}$ يعبر عن نسبة رأس المال إلى العمل . ويعنى الانتقال على طول الخط تجاه الشمال الشرقى زيادة الانتاج باستخدام نفس نسبة المدخلات . ويساوى ميل الخط و ب $\frac{٢}{٣}$.

ويمكن استخدام الشكل (٦ — ٢) فى عرض حالة تزايد الغلة إذا نقلنا وضع منحنيات سواء الانتاج بحيث تتناقص المسافة بينهما شيئاً فشيئاً بالتدريج ليصبح كل منحنى أكثر قرب من المنحنى المجاور له . فالمنحنى ٢٠ يصبح أقرب إلى المنحنى ١٠ أى أن مضاعفة الانتاج فى هذه الحالة يحتاج إلى زيادة كمية المدخلات بمقدار أقل من الضعف . كذلك فان منحنى سواء الانتاج ٣٠ يصبح أقرب إلى المنحنى ٢٠ ... وهكذا .

وحتى يمكن تصوير حالة تناقص الغلة على نفس الشكل فاننا نعيد أوضاع منحنيات سواء الانتاج بحيث تتزايد المسافة بينهما شيئاً فشيئاً .

ويعنى التناسب فى هذا المضمون الابقاء على أحد المدخلات ثابت بينما يزيد الانتاج بزيادة مقدار المستخدم من المدخل الآخر . فى الشكل (٦ — ٢) نجد أن رأس المال يظل ثابتاً عند « و م ». ويبين الخط « م هـ » كيف يمكن استخدام كميات أكبر من العمل لزيادة الانتاج . ولنفرض أن المنتج بدأ أولا بالتحرك إلى أعلى الخط « و م » من النقطة « د » إلى النقطة «ث» ومع ثبات رأس المال عند « و م » فان المنتج ينتقل إلى النقط ف ث هـ .

ويلاحظ أن تحدب سواء الانتاج يجعل « ف ث » أطول من « ث ف » ،

(ث م) أطول من (ف ث) • ويعنى ذلك أن زيادة الإنتاج بمقدار ١٠ وحدات لا يمكن الحصول عليه إلا باستخدام زيادات متلاحقة من العمل . ولنفرض أن (ث ف) تمثل وحدة عمل ، (ف ث) ١٫٢٥ وحدة عمل • فإن إنتاج وحدة العمل فى المسافة بين (ث ، ف) هو ١٠ ÷ ١ = ١٠ • وإنتاجية العمل فى المسافة بين (ف ، ث) هى ١٠ ÷ ١٫٢٥ = ٨ . ويشير ذلك إلى تناقص الإنتاجية الحدية للعمل عند التوسع فى الإنتاج على طول الخط م هـ .

لذلك فإن الشكل (٦ — ٢) له نفس مكونات الجدول (٦ — ١) فهناك ثبات للغلة عندما يزيد كلا المدخلين بنفس النسبة وتناقص الغلة الحدية عندما يزيد أحد المدخلات دون الآخر •

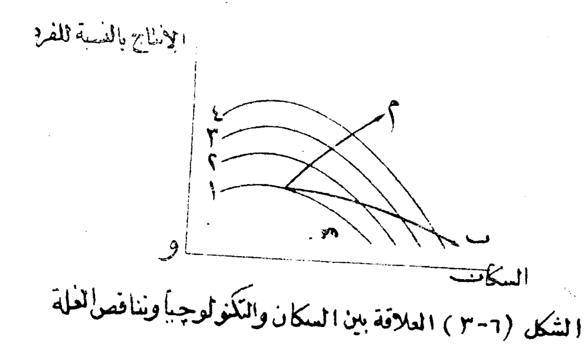
لقد حملت آراء الاقتصاديين التقليديين نظرة تشاؤمية لنمو السكان كقوة تدفع البشرية إلى استخدام مواد أقل جودة وتؤدى إلى ضعف مستوى المعيشة . ولكن استمرار التقدم التكنولوجى قد أثبت قصور هذه النظرة وأصبحت التوقعات التى بناها هؤلاء الإقتصاديين القدماء خرافة لم تتحقق . فارتفع دخل الفرد فى العديد من الدول المتقدمة بأضعاف ما كان عليه فى القرن التاسع عشر . واضطرد نمو الإنتاجية بمعدلات أسرع من معدلات نمو السكان .

ولكن ارتفاع معدلات النمو الذى بدأ فى العشر سنوات الماضية قد أدى إلى زيادة أعداد السكان بشكل كبير الأمر الذى جدد الخوف من جراء ما يحمله هذا التدفق السكانى من ضغوط على مستويات المعيشة .. ولقد عانت الدول النامية من جراء هذا الانفجار السكانى . فكلما تدفقت السلع والخدمات نتيجة لجهود التنمية فى هذه البلاد . وجدت أمامها أفواها تتسارع فى الحصول عليه • وتلتهم كل ما يتحقق من مكاسب نتيجة لتقديم التكنولوجيا الحديثة فى هذه البلاد .

ويصور الشكل (٦ — ٣) العلاقات المنطقية بين السكان والتكنولوجيا

وتناقص الغلة لنفرض أننا نستعرض حالة دولة يتوافر لها حجم معين من الموارد الاقتصادية والمؤسسات ولنفرض أن نسبة القوة العاملة إلى السكان فى هذه الدولة ثابتة .

ويصور المنحنى ١ متوسط الإنتاج بالنسبة للفرد . والسبب فى استخدام المنحنى المتوسط هو أن الإنتاج المتوسط ومتوسط الدخل الحقيقى يعبران عن نفس الشىء. ويلاحظ أن الجزء الأيسر من المنحنى يزيد ، ليدل على أنه عندما يكون عـدد السكان صغير جداً ، فإن الإنتاجية المتوسطة للفرد تتزايد مع زيادة عدد الأفراد الذين يعملون مع حجم معين من الموارد . وتعتبر هذه أحد الطرق للتعبير عن انخفاض حجم السكان عن الحجم الأمثل . Under Population كذلك فإن عدد الأفراد الذى يناظر أعلى نقطة على المنحنى ١ . (أو أعلى نقطة لأى منحنى آخر) يمكن تسميتها بالحجم الأمثل للسكان . وفى الجزء المتناقص من المنحنى تقع منطقة تناقص الغلة المتوسطة عنـدما يكون حجم السكان أكبر من الحجم الأمثل Over Population .



الشكل (٦-٣) العلاقة بين السكان والتكنولوجيا وتناقص الغلة

وتعبر المنحنيات ١، ٢، ٣، ٤ فى الشكل (٦ — ٣) عن ارتفاع الإنتاجية بالتتابع فى أربع عقود زمنية متعاقبة . ويساهم تحسن التكنولوجية فى رفع المنحنيات ولكنها تتناقص فى الطرف الأيمن . والتطوير فى التكنولوجيا وتناقص الغلة لا يتعارضا كما يبدو فى بعض الأحيان .

ولنفرض الآن أن حجم السكان قد زاد بينما تحسنت التكنولوجيا كما يشير إليها الخط أوهنا نجد أن التطور التكنولوجى يزيد بمعدل أسرع من نمو السكان ومن ثم يرتفع نصيب الفرد من الانتاج من فترة زمنية إلى أخرى . وتشير نقط تقاطع الخط (أ) مع منحنيات الانتاجية إلى تصاعد مستويات المعيشة . ولكن إذا فرض أن زاد معدل نمو السكان عن معدل تطور التكنولوجيا (كما يظهر فى الخط ب) فإن متوسط دخل الفرد سيضطرد فى الانخفاض .

الفصل السابع

تحديد مستوى الانتاج والاختيار الأمثل للمدخلات

يعتمد اختيار أسلوب الانتاج على الاسعار النسبية لعوامل الإنتاج وكميات المدخلات فعند اتخاذ المنشأة قرار بشأن شراء مدخلاتها فانها قد تقرر شراء الآلات أو التعاقد على استخدامها بالايجار كذلك فانها تستخدم أنواع متعددة من العمل وتشترى المواد الخام أو النصف مصنعه وتشترى الطاقة الكهربائية والوقود والمياة والعديد من التجهيزات والمهمات المتنوعة . وقد سبق أن بينا هيكل مزيج المدخلات المستخدم فى الانتاج فى إطار حديثنا عن دالة الإنتاج .. ويتحدد حجم المدخلات فى دالة الانتاج طبقاً للاسلوب الفنى للانتاج وتتغير الكميات المستخدمة من هذه المدخلات كلما تغير أسلوب الإنتاج . ولكل مدخل من المدخلات سعر معين يتعين على المنشأة أن تدفعه للحصول على هذا المدخل . وتؤثر أسعار المدخلات ، وإنتاجية كل منها فى دالة الإنتاج ، على قرارت المنشأة فى تحديد كمية ماتشتريه من كل مدخل من هذه المدخلات .

لنفرض ، مثلا ، أن منشأة تريد أن تدنى من تكلفة أى منتج تنتجه . .

والوصول بالتكلفة إلى أدنى حد ممكن ، فى ظل إيراد كلى معين لمستوى من مستويات الإنتاج ، هو فى الحقيقة شأنه شأن تعظيم الارباح. لذلك فانه عند تصميم منحنيات التكاليف والتى تظهر بالفصل الثامن روعى فى الأشكال المبينة افتراض أن كل نقطة من النقط الواقعة على منحنى التكلفة تمثل أدنى تكلفة لمستوى الإنتاج المناظر لذا تحدد نظرية المنشأة فى اختيار المدخلات الشروط التى يتعين توافرها

لتحقيق أدنى تكلفة . كذلك تضع النظرية الأساس فى طلب المنشأة لعوامل الإنتاج . وعلى أساس ذلك تكون جانب الطلب لنظرية تحديد دخول عوامل الإنتاج .

وسوف نعالج فى هذا الفصل من الكتاب دالة الإنتاج للمنشأة بافتراض أن هذه الدالة تسمح باحلال أحد المدخلات محل الآخر بدرجة صغيرة . ويمكننا التنازل عن هذا الفرض فيما بعد لتبين أنه يمكن للمنشأة أن تتخذ قراراتها حول المدخلات عندما لا يكون هناك مجال لاحلال أحدهما محل الآخر أو فى الظروف التى يمكن إحلالها بنسب ثابتة . وبعبارة أخرى فاننا نعترض فى هذا الفصل ، مثلا ، أن المنشأة عندما تستخدم رأس المال مقاسا بالآلة / ساعة والعمل ساعة فانها تستطيع الإنتاج باستخدام المزيد من أحدهما والقليل من الآخر ، إذ يمكن إحلال الآلة / ساعة محل العمل / ساعة والعكس صحيح . ويمكننا فيما بعد أن نستعرض الحالات التى يكمل كل منهما الآخر فالالة / ساعة تحتاج إلى عامل يديرها وتنظيمها علاقة ثابتة بينهما . والنظريتان لا يتعرضان مع بعضهما البعض ولكنهما يكملان ويعضدان بعضهما الاخر فافتراض سهولة الاحلال فى دالة الإنتاج هو أبسط الافتراضات . وأثرها عمومية ويلقى مزيداً من الايضاح ويلائم هذا الفرض ، كذلك ، الأجل الطويل عندما تكون كل للدخلات متغيرة بينما نجد أن فرض ثبات النسب بين المدخلات ومحدودية الاحلال بينهما يلائم الأجل القصير حيث الكثير من المدخلات يكون ثابتاً كذلك يتلائم مع بعض الأنواع من المشاكل العملية .

الانتاج عند استخدام مدخل متغير واحد

نبدأ بالحالة المبسطة التى يمكن فيها للمنشأة أن تنتج المزيد أو القليل عن طريق تغير كمية أحد المدخلات. ولنفرض أن هذا المدخل هو نوع معين من العمل. وحتى يمكن الوصول إلى الحجم الأمثل المطلوب استخدامه من هذا العمل، يتعين على المنشأة أن تنظر إلى ثلاثة معلومات مجتمعة — السعر الذى يدفع للعمل، وإنتاجية العمل، وسعر المنتج النهائى الذى تبيعه المنشاة.

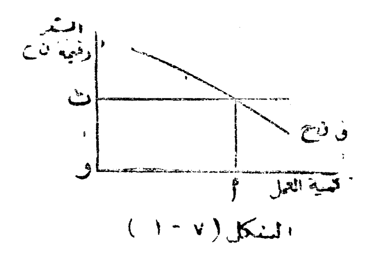
وللتمادى فى التبسيط دعنا نفترض كذلك، ولو مؤقتاً، أن المنشأة لاتستطيع التحكم كلية فى السعر الذى يتعين عليها تسديده للعمل والسعر الذى تحصل عليه لقاء ماتعرضه من منتجات. وفى ظل هذه الظروف، تكون الكمية المثلى من المدخل المتغير هى تلك الكمية التى تتعادل إنتاجيتها الحديه مع سعر المدخل. ومن ثم فان آخر رجل توظفه المنشأة يكاد يغطى تكلفته.

وتقاس الانتاجية الحدية لعنصر العمل بوحدات مثل الأردب وعدد الأمتار أو الأطنان، وقيمته الانتاجية الحدية هى الانتاجية الحدية مضروبة فى السعر الذى تحصل عليه المنشأة. فاذا فرضنا أن الانتاجية لعشرين رجل هى ٤ طن فى اليوم، فان ذلك يعنى ٢٠ رجل يعطون ٤ أطنان زيادة عما يعطيه ١٩ رجل. وإذا فرضنا بعد ذلك أن المنشأة تحصل على ٧ جنيهات ونصف عن كل طن. فان قيمة الناتج الحدى لعشرون رجلا هو ٣٠ جنيه، فاذا كان الأجر اليومى (أى إجمالى تكلفة العمل التى تتحملها المنشأة بما فيها أقساط التأمين والمكافآت والحوافز وغيرها)، هو ٣٠ جنيه فانها تكاد تكفى لتغطية تكاليف ٢٠ رجل. ولا يمكن للمنشاة أن تتحمل تكلفة استخدام أكثر من ٢٠ رجل لأن قيمة

الناتج الحدى ستنخفض وتصبح أقل من الأجر، فالناتج الحدى لواحد وعشرون رجل أقل من قيمة أربعة أطنان ومع ذلك فان سعر الطن يظل كما هو ٥ر٧ جنيه كذلك لن تستطيع المنشأة أن تستمر فى توظيف أقل من ٢٠ عامل لأن المنشأة حينئذ لن تتمكن من انتهاز الفرصة فى شراء وحدات من المدخل تدر عليها إيراد يزيد على التكلفة التى تتحملها ، فالناتج الحدى للعمل يزيد على ٤طن فى هذه المرحلة .

ويوضح الشكل (٧ – ١) تحديد الكمية المثلى للمدخل المتغير ، حيث يبين الأحداثى الأفقى كمية المدخل المتغير ، ويقاس سعر المدخل المتغير وقيمة الناتج الحدى له عن الأحداثى الرأسى .

فاذ فرضنا أن سعر المدخل هو « و ث » وقيمة الناتج الحدى على المنحنى « ف ن ح » ، فان الكمية المثلى للمدخل المتغير تكون هى « و أ » حيث تتعادل قيمة الناتج الحدى لهذه الكمية مع السعر . وأى كمية تزيد عن ذلك تكون قيمة الناتج الحدى .



الشكل (٧ - ١)

عندها أقل من السعر ، بينما الكمية التى تقل عن ذلك تزيد فيها قيمة الناتج الحدى عن السعر مما يدل على أن هناك فرصة مضاعة لم تستغلها المنشأة . ويمكن أن نطلق كذلك على « و أ » الكمية التوازنية . وبالقرب من التوازن لابد وأن تتناقص قيمة الناتج الحدى ، ذلك أنها لو كانت تتناقص أو حتى ثابتة عند نقطة أعلى من السعر ، فان المنشأة تستطيع التوسع بدون حدود ، أما إذ كان منحنى قيمة الناتج الحدى عند أى مستوى أقل من خط السعر ، فان المنشأة لن تستخدم هذا المدخل على الاطلاق .

ويجب ملاحظة أن هناك ثلاثة متغيرات هنا — سعرين والانتاجية . فإذا حصلت المنشأة على سعر مرتفع لمنتجاتها فان منحنى قيمة الناتج الحدى سينتقل إلى اليمين وكذلك الحال فى حالة تطور التكنولوجيا . وإذا تغير سعر المدخل ، سينتقل الخط الأفقى لسعر المدخل إما إلى أعلى أو إلى أسفل وسوف تنتهى اى من هذه التغيرات أو مجموعة منها بالوصول إلى نقطة توازن جديدة ، حيث تتحدد كمية جديدة مثلى للمدخل .

والقاعدة التى تقرر أن الكمية المثلى للمدخل هى تلك الكمية التى يتعادل عندها قيمة الناتج الحدى مع السعر ، هى ذات قاعدة الكفاية الاقتصادية . Economic Efficiency وهى قاعدة لها تطبيقات عديدة أبعد من مجرد التطبيقات على منشأة الأعمال .

وعموما ، فان أى مؤسسة تسعى إلى الحصول على أفضل النتائج مما تبذله من جهود ، سوف تستخدم المورد إلى النقطة التى يتعادل ما تساهم به الوحدات الإضافية من المورد مع التضحية المطلوبة للحصول على هذه الوحدة الأخيرة .

جدول (٧ — ١)

الكمية المثلى لمدخل متغير واحد

عدد العمال المدخل	الناتج الحدى الإنتاجى	الأسعار		قيمة الناتج الحدى (١)	التكلفة الحدية (٢)
		سعر المدخل	سعر المنتج		
	طن	جنيه	جنيه	جنيه	جنيه
١٩	٥	٣٠	٥ر٧	٥ر٣٧	ر٦
٢٠	٤	٣٠	٥ر٧	٣٠	٥ر٧
٢١	٣	٣٠	٥ر٧	٥ر٢٢	ر١٠

ويلخص الجدول (٧ — ١) النقاط الأساسية التى تناقشها إذ يمكن تصور الأرقام المبينة بالجدول (٧ — ١) على أنها تمثل جزء من مجموعة أكبر من الأرقام، أخترنا منها فقط تلك البيانات التى تقع فى منطقة التوازن — منطقة إتخاذ القرارات الرشيدة . ويعطى العمود الأخير من الجدول التكلفة الحدى أى تكلفة الوحدات الإضافية من الإنتاج فعند تشغيل ٢٠ عامل بدلا من ١٩ تكون التكاليف الإضافية ٣٠ جنيه والإنتاج الإضافى ٤ أطنان ولهذا فإن التكلفة الإضافية لكل طن عند هذا المستوى من الإنتاج هى ٥ر٧ جنيه . ويلاحظ أن التكلفة الحدية تساوى سعر المنتج عند الكمية التوازنية من المدخل .

---

(١) الناتج الحدى مضروب فى سعر المنتج .

(٢) سعر المنتج مقسوم على الناتج الحدى.

وتجدر الإشارة إلى العلاقة بين التكلفة الحدية للانتاج والناتج الحدى للمدخل المتغير الوحيد .

ويمكن إعادة صياغة التوازن بالطريقة الآتية :

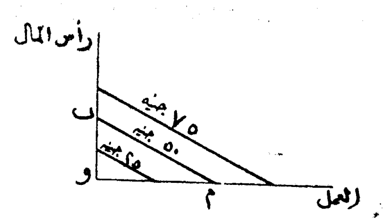
$$\text{سعر المنتج} = \text{التكلفة الحدية} = \frac{\text{سعر المدخل}}{\text{الناتج الحدى}}$$

<u>الكمية المثلى فى حالة وجود مدخلين متغيرين:</u>

ولننتقل الآن للحالة التى تستخدم فيها المنشأة مدخلين متغيرين بدل من متغير واحد . والفرض هنا أن المنشأة تستطيع التوسع فى الإنتاج أو تقليل الإنتاج باستخدام المزيد من أحد المدخلين أو كلاهما : وهنا سنوسع فى استخدام منحنيات سواء الإنتاج التى تحدثنا عنها فى الفصل السابق .

خطوط سواء التكلفة

عندما تحاول المنشأة اختيار الكميات التوازنية لمدخلين يتعين عليها أن تأخذ فى الحسبان الإنتاجية الحدية لهذين المدخلين وأسعارهما . وتوضح منحنيات سواء الإنتاج بيانات الإنتاجية . بينما تظهر أسعار المدخلات فى نفس الشكل على خطوط التكلفة ويبين الشكل (٧ — ٢) ثلاثة من هذه الخطوط . فالخط « ب أ » مثلا ، يبين أو عدد من وحدات (الساعات مثلا) العمل والتى تمثلها المسافة « و أ » تكلف المنشأة ٥٠ جنيه كذلك يمكن للمنشأة أن تشترى « و ب » من وحدات رأس المال (مثل الآلة / ساعة) .



الشكل (٧-٢) خطوط سواء التكلفة

ويلاحظ من الشكل أن طول المسافة « و أ » ضعف المسافة « و ب » مما يدل على أن سعر وحدة العمل يبلغ نصف سعر وحدة رأس المال لذلك فإن ميل الخط يبين نسبة الأسعار . وتمثل أى نقطة تقع على الخط « ب أ » حجم إنفاق قدره ٥٠ جنيه نظير عدد وحدات العمل ورأس المال .

ويقع الخط ٧٥ جنيه أعلى يمين الخط « ب أ » وموازى له ، مشيرا بذلك إلى ان الحصول على المزيد من أى من العمل أو رأس المال أو كلاهما معا يمكن شرائه بنفس الأسعار التى كانت محددة من قبل . وخطوط سواء التكلفة مستقيمة مما يعنى أن المنشأة ليس لها سيطرة على أسعار المدخلات وأن الأسعار تظل كما هى بصرف النظر عن عدد الوحدات التى تشتريها المنشأة .

وميل خط سواء الانتاج هو $\frac{\text{س ع}}{\text{س م}}$ ، أى نسبة سعر العمل إلى سعر رأس المال عندما يكون العمل ممثلا على الاحداثى الأفقى ورأس المال على الأحداثى الرأسى ، ومن ثم فانه بالنسبة لأى خط سواء التكلفة يكون :

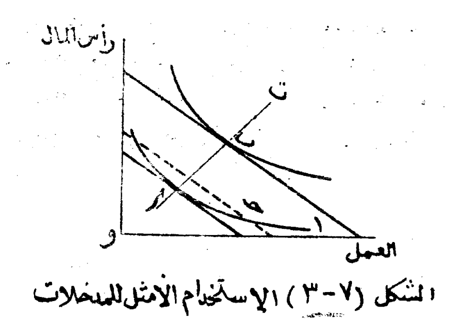
$$\text{الميل} = \frac{\text{كمية رأس المال}}{\text{كمية العمل}} = \frac{\text{الانفاق}}{\text{سعر م}} \div \frac{\text{الانفاق}}{\text{سعر ع}} = \frac{\text{س ع}}{\text{س م}}$$

وتماثل هذه الخاصية لخط سواء التكلفة خاصية خط الميزانية للمستهلك . ولكن هناك أختلاف بين الخطين فالمستهلك لديه ميزانية واحدة فقط ومن ثم له خط ميزانية واحد . ولكن المنشأة لديها مجموعة من خطوط سواء التكلفة .

ويشير الشكل (٧ — ٢) إلى ثلاثة منها فقط . وإذا تصورنا وجود عدد أكبر منها فان المنشأة تستطيع التوسع أو الانكماش فى مستوى الانتاج ومن ثم يمكن تتحمل تكلفة أعلى أو أقل . وتشير خطوط سواء الانتاج إلى تكاليف أعلى وتلك الخطوط على اليسار تعكس تكاليف أقل .

الاستخدام الأمثل للمدخلات

تسعى المنشأة إلى انتاج أى حجم من الإنتاج بأقل تكلفة ، ويظهر مستوى الإنتاج (الذى يتحقق بأقل تكلفة) على منحنى سواء الإنتاج عند نقطة تماس منحنى سواء الإنتاج مع سواء التكلفة . ويمكن نرى ذلك فى الشكل (٧-٣) حيث يوجد منحنيين لسواء الإنتاج يمس كل منهما خط سواء التكلفة . وأى نقطة أخرى تقع على أى من منحنى سواء الإنتاج تقع كذلك على خطوط سواء للتكلفة إلى أعلى اليمين . ومن ثم فان أى نقطة أخرى على سواء الإنتاج تعطى نفس حجم الإنتاج ولكن بتكلفة أعلى . ولنأخذ مثلا النقطة « ح » على منحنى سواء الإنتاج ١ ، وحجم العمل ورأس المال الذى يمثله النقطة « ح » يعطى نفس حجم الإنتاج الذى يعطيه حجم العمل ورأس المال الممثل بالنقطة « أ » ، ولكن خط سواء التكلفة للنقطة (ح) (الخط المتقطع) يقع فى اتجاه اليمين وأعلى من خط سواء التكلفة للنقطة « أ » ولذلك فان نقطة التماس تعنى أدنى تكلفة .



الشكل (٧-٣) الاستخدام الأمثل للمدخلات

والخط « ت » بالشكل (٧ — ٣) هو خط التوسع ، ويربط بين نقط التماس أى النقط « أ ، ب » وغيرها من النقط التى لم تظهر فى هذا الشكل . وتتوسع المنشأة فى إنتاجها على طول الخط « ت » .

وشرط الوصول إلى أدنى تكلفة هو أن المنشأة تختار الكميات من المدخلين التى تناظر نقط تماس خطوط سواء التكلفة مع منحنيات سواء الإنتاج . وعند نقط التماس يتعادل الميل (ميل سواء الإنتاج مع ميل سواء التكلفة) وميل خطوط سواء التكلفة هى نسبة أسعار المدخلات ، وميل منحنيات سواء الإنتاج هى نسبة الإنتاجية الحدية للمدخلات . وهو أيضاً يعبر عن المعدل الحدى الفنى للاحلال .

The merginal rate of technical substitution

بين المدخلات . فاذا رمزنا لرأس المال بالرمز « م » والعمل بالرمز « ع » فأن:

$$\frac{\text{سعر ع}}{\text{سعر م}} = \frac{\text{الناتج الحدى للعمل (ن ح ع)}}{\text{الناتج الحدى لرأس المال (ن ح م)}}$$

$$\text{و} \quad \frac{\text{ن ح م}}{\text{سعر م}} = \frac{\text{ن ح ع}}{\text{سعر ع}}$$

بمعنى أنه إذا كانت تكلفة الآلة — ساعة تعادل ضعف تكلفة — ساعة ، فإن الإنتاجية الحدية للآلة — ساعة لا بد وأن تكون ضعف إنتاجية ساعة العمل عند الوضع الأمثل . وبعبارة أخرى فان ما نحصل عليه من اضافة إلى الإنتاج الكلى نتيجة إنفاق جنيه فى الآلة ساعة يعطى نفس الاضافة من انفاق جنيه فى العمل / ساعه .

والواضح أن سلوك المنشأة فى تحديد الاستخدام الأمثل (حجم ما نشتريه) من المدخلات يماثل تماما سلوك المستهلك . فكلا المنشأة والمستهلك يشترون الأشياء بالكميات التى تعادل بين الأهمية الحدية وبين السعر . وكما هو شأن المستهلك فى تعديل ميزانيته بحيث يعادل الزيادات فى الاشباع من آخر جنيه ينفقه على كل سلعة ، فان المنشأة تعدل من انفاقها لكى تعادل بين الزيادات فى كمية الناتج من آخر جنيه ينفق على كل مدخل .

حالة وجود العديد من المدخلات

ولننتقل الآن لنعم نتائج تحليل مدخل واحد أو مدخلين متغيرين على الحالة التي يوجد فيها أكثر من مدخلين ومتغيرين . والحقيقة أن المعالجة البيانية لحالة وجود ثلاثة مدخلات متغيرة يستلزم التعامل من ثلاثة أحداثيات مما يضفى صعوبة على التحليل . وفى الحالة التى يوجد فيها أربعة مدخلات أو أكثر فإن التحليل الدقيق يستلزم استخدام الطرق الجبرية . والحقيقة أن سلوك المستهلك لايختلف كثيرا فى حالة شرائه لعديد من المدخلات . وتنطبق نفس القاعدة ومن ثم فإننا نتوسع فى تحليل حالة مدخلين متغيرين لتطبقها على الحالة التى يحدد فيها المنتج مشترياتها من العديد من المدخلات ليصل إلى الوضع الأمثل .

ولنفرض أن المدخلات التى تشتريها المنشأة هى أ ، ب ، جـ ، ..... ، ن وبالتوسع فى تطبيق النتائج السابقة يتضح أن :

$$\frac{\text{ن ح ا}}{\text{سعر ا}} = \frac{\text{ن ح ب}}{\text{سعر ب}} = \frac{\text{ن ح جـ}}{\text{سعر جـ}} = \cdots\cdot = \frac{\text{ن ح ن}}{\text{سعر ن}}$$

كذلك فان :

$$\frac{\text{سعر ا}}{\text{ن ح ا}} = \frac{\text{سعر ب}}{\text{ن ح ب}} = \frac{\text{سعر جـ}}{\text{ن ح جـ}} = \cdots \frac{\text{سعر ن}}{\text{ن ح ن}} = \text{ث ح}$$

حيث (ث ح) هى التكلفة الحدية . ولما كانت ت ح = سَ حيث سَ هو سعر المنتج الذى تبيع به المنشأة انتاجها ، فان :

$$\frac{\text{سعر ا}}{\text{ن ح ا}} = \frac{\text{سعر ب}}{\text{ن ح ب}} = \cdots\cdots = \frac{\text{سعر ن}}{\text{ن ح ن}} = \overline{\text{س}}$$

وتبين هذه المعادلة الأخيرة أن قيمة الناتج الحدى لكل مدخل (مثل ن ح ا × $\overline{\text{س}}$ = س ا) تساوى السعر الذى يسدد مقابل الحصول على هذا المدخل. لذلك فإنه عندما تسعى المنشأة إلى تدنية التكاليف أو تعظيم الأرباح فإنها تشترى كل مدخلاتها بالكميات التى تجعل قيمة نواتجها الحدية مساوية لأسعارها.

التغيرات فى أسعار المدخلات

لنفرض أن سعر أحد المدخلات التى تستخدمها المنشأة قد انخفض . فان المنشأة ستشترى كمية أكبر من هذا المدخل إلى الحد الأدنى الذى يتعادل فيه قيمة الإنتاجية الحدية المنخفضة للكمية الاكبر مع السعر المنخفض . غير أن آثار الانخفاض فى سعر أحد المدخلات يمتد لاكثر من ذلك . إذ أنها تحدث تموج من خلال المعادلات التى تربط بين انتاجية المدخلات وأسعارها وتكاليفها ولذلك سيحدث نوع من التعديلات فى المدخلات نتيجة لتغير سعر إحدهما . وطبيعى أن المزارع لا يحتاج إلى التوجيه إلى أقرب مركز بحوث ليسأل عن اقتصادى رياضى يحل له مشكلته على الحاسب الآلى . فخبرة الفلاح ومعلوماته التى اكتسبها من ممارسته للعمل تكفى لتوضيح الطريق أمامه فيماذا يعمل . وعندما يحاول الحفاظ على تكاليفه عند أقل حد ممكن ، عند مستوى معين من الانتاج ، فان الفلاح لا يعمل مثلما يعمل الحاسب الآلى عندما يمده بالحل .

أثر الاحلال وأثر الانتاج :

التغير فى سعر سلعة استهلاكية له أثر احلالى وأثر دخلى على المستهلك . وهذا ما ناقشناه عند التعرض للحديث عن سلوك المستهلك . كذلك تقع المنشأة تحت نفس المؤثرات . فانخفاض سعر أحد المدخلات يؤدى إلى زيادة المستخدم منه حتى ولو ظل إجمالى انتاج المنشأة ثابتا . هذا هو أثر الاحلال . غير أن السعر الرخيص للمدخل يؤدى إلى خفض التكاليف والتى تحمل المنشأة على التوسع فى جمالى الانتاج وبالتالى تؤدى إلى زيادة أكبر فى استخدام المدخل الرخيص . وهذا هو أثر الانتاج أو أثر التوسع .

سلوك المنتج فى حالة انتاج سلعتين

ناقشنا حتى الآن حالة المنشأة التى تنتج سلعة واحدة أو منتج واحدة . غير أن هناك العديد من المنشآت التى تنتج أكثر من سلعة أو منتج واحد . ونود أن ننتقل هنا لنناقش حالة منشأة تنتج سلعتين . فنتساءل كيف تختار المنشأة النسب التى تنتج بهما السلعتين ؟

والاجابة على هذا السؤال تماثل صيغة اختيار نسب المدخلات . فالذى ينطبق على المدخلين ينطبق كذلك على السلعتين . حيث تنتج المنشأة سلعتين أو منتجين بالنسبة التى تجعل معدل الاحلال الحدى (أو التحول) بين المنتجات مساوى لنسبة أسعارهم .

منحنى امكانية الإنتاج :

لنفرض أن منشأة تستطيع إنتاج سلعتين ولتكن احدهما (س) والأخرى (ص) ولنفرض أن المنشأة يتوفر لديها كمية معينة من الموارد (الآلات والمعدات والعمال) . ويمكن للمنشأة أن تستخدم هذه الموارد فى إنتاج كميات مختلفة من السلعتين (س ، ص) ، فى ظل شروط معينة تقضى بأنه إذا زاد إنتاج المنشأة من السلعة (س) فإنها لا بد وأن تقلل من إنتاجها من السلعة (ص) والعكس صحيح .

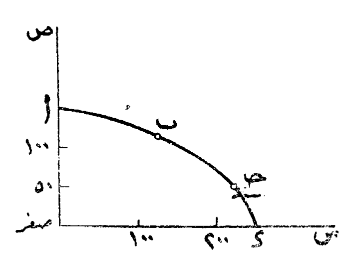
ولنفرض أن امكانيات الإنتاج الشهرية للمنشأة كانت على النحو التالى :

جدول (٧ — ٢)

جدول امكانيات الإنتاج

البدائل	إنتاج س	إنتاج ص
ا	صفر	١٥٠
ب	١٢٥	١٢٥
حـ	٢٢٥	٥٠
ء	٢٥٠	صفر

هذه البيانات الافتراضية المبينة بالجدول (٧ — ٢) يمكن تمثيلها بيانياً بالشكل (٧ — ٤).



الشكل (٧-٤) منحنى امكانية الإنتاج

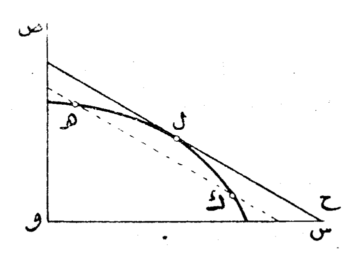
حيث يعبر المنحنى (أ د) عن منحنى امكانية الإنتاج الشهرى للمنشأة وتقابل النقط (ب ، حـ) على المنحنى البدائل (ب ، حـ) فى الجـدول . فإذا تيسر للمنشأة مزيد من الموارد فإن المنحنى ينتقل إلى أعلى اتجاه الشمال الشرقى . لذلك فإن المنشأة يكون لديها منحنى امانية إنتاج مختلف لـكل كمية من الموارد .

والمنحنى مقعر تجاه نقطة الأصل ، (والقيمة المطلقة د) وميل المنحنى أكبر عند النقطة (حـ) عنها عند النقطة (ب) . وهـذا يعنى أنه كلما زاد إنتاج السلعة (س) كلما زادت التضحية بإنتاج السلعة (ص) أكثر فأكثر . كذلك فان الزيادة فى إنتـاج السلعة (ص) تعنى الزيادة بانتاج السلعة (س) أكثر فأكثر . فموارد المنشأة ليست مهيئة بالـكامل لإنتاج كلا السلعتين وعندما نتركز فى إنتاج أحد هاتين السلعتين مثل الإنتاج عند النقطة (حـ) ، فإن الموارد تـكون أقل إنتاجية . وبعبارة أخرى فإن تقعر المنحنى يشير إلى تناقص الغلة الحدية . فلـكل وحدة إضافية مضحى بها من إنتاج (ص) تقل الزيادة فى إنتاج (س) شيئاً فشيئاً وكذلك العـكس صحيح .

خطوط سواء الإيراد Isorevenue Lines

لا شك أن المنشأة ترغب فى تعظيم إيرادها الذى تحصل عليه من بيع السلعتين التى تنتجهما . وهى تحتاج بجانب امكانيات الإنتاج أن تأخذ فى اعتبارها أسعار السلعة س والسلعة ص . ولنفرض أن الطلب على كلا المنتجين مرن بالنسبة للمنشأة وعلى ذلك فإن الأسعار التى تبيع بها لن تتأثر بالكميات التى تبيعها .

وتبين خطوط سواء الإيراد الإيرادات المتاحة للمنشأة . وهى تأخذ نفس الشكل الذى تأخذه خطوط سواء التكلفة . ويظهر خط سواء الإنتاج فى الشكل (٧ — ٥) على شكل الخط (ف ح) ويعطى حاصل ضرب الكمية (و ح)



الشكل (٧ - ٥) الإختيار الأمثل للمنتجات

من السلعة (س) فى سعر س نفس (سواء) الإيراد الذى تعطيه الكمية (و ف) من (ص) مضروبة فى سعر (ص) وميل خط سواء الإيراد هـو

$\frac{\text{سعر س}}{\text{سعر ص}}$ لأن الميل = $\frac{\text{ف و}}{\text{و ح}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ وكذلك ص × سعر ص = س × سعر س ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{سعر س}}{\text{سعر ص}}$ ويبين وضع خط سواء الإيراد حجم الإيراد الكلى . فكلما ابتعد الخط تجاه الشمال الشرقى كلما زاد الإيراد الكلى الذى يبينه خط سواء الإيراد . وكما أن هناك مجموعة من خطوط سواء التكلفة ، كذلك هناك مجموعة من خطوط سواء الإيراد .

الوضع الأمثل من إنتاج كلا السلعتين :

تمثل النقطة (ل) فى الشكل (٧ — ٥) الوضع الأمثل للمنشأة وتنتج المنشأة عندئذ السلعتين (س ، ص) بالكميات التى تشير إليه النقطه (ل) وبهذا تعظم المنشأة إيرادها الكلى لأن (ل) تقع على أعلى خط سواء إيراد ممكن الوصول إليه .

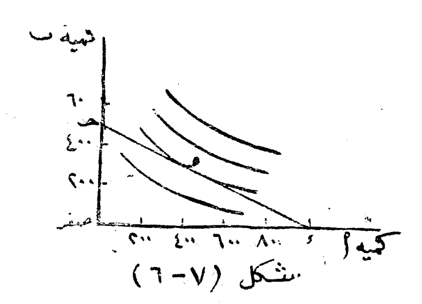
فإذا قامت المنشأة بالإنتاج عند نقطة أخرى مثل (هـ ، ك) فإنها تكون عند خط سواء إيراد أقل مثل الخط المتقطع فى الشكل .

وعند النقطة (ل) يكون خط سواء الإيراد مماساً لمنحنى امكانية الإنتاج . لذلك فإن ميلهما يكون متساوى ، بمعنى أن نسبة الأسعار $\frac{\text{ع س}}{\text{ع ص}}$ تساوى معدل الاحلال (أو التحول) بين السلعتين . وهذه قاعدة أخرى للكفاية الإقتصادية .

تطبيقات

يمكن تطبيق الأفكار التى نوقشت فى هذا الفصل فى مجال إتخاذ القرار الخاص بالدفاع القومى . فلنفرض أن هناك نوعين من الأسلحة الرئيسية وينحصر موضوع سياسة الدفاع فى كيف يمكن استخدام الاثنين معاً . وسوف نقيس فاعليتهما — إنتاجية كل منهم — على أحد الأحداثيات حيث تمثل عدد الأهداف التى يتوقع أن تحطمها . فلتحقيق أهداف معينة بذاتها ولتكن ١٠٠ مثلا يمكن استخدام السلاحين بتوليفات مختلفة . ويمكن أن يحل أحد الأسلحة محل الآخر فى حدود معينة .

لذلك يمكن رسم منحنيات سواء الإنتاج لهذين السلاحين . ويظهر ذلك فى الشكل (٧ — ٦) حيث تظهر أربعة منحنيات سواء كل واحد منها يدمر أهداف معينة ٥٠ ، ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ هدف . وربما تبدو منحنيات سواء الإنتاج فى الشكل (٧ — ٦) وكأنها مستوية أكثر مما ينبغى ويشير ذلك إلى أن



شكل (٧-٦)

السلاحين بديلين قويين ، وهى علاقة ليست عادية . ولنفرض أن كل نقطة على كل سواء إنتاج تمثل أفضل استخدام وتعضيد لهـذه التوليفة من السلاحين . فكيف نصل إلى قرار بشأن تحديد أفضل هذه النقط ؟ وتعتمـد الإجابة على التكاليف . وهناك خط واحد لسواء التكلفة بالرسم (٧ — ٦) يصل بين النقط التى تمثل ١٠٠٠ وحدة من السلاح أ و ٥٠٠ من السلاح ب .

ولنتصور أن حجم الميزانية بلغ بالقدر الذى يمنع عـدم الانفاق على المزيد من أ أو ب فإذا انفقنا كل الميزانية على أ يمكن الحصول على ١٠٠٠ وحـدة منها فقط ولكن إذا انفقنا كل الميزانية على (ب) ، فإن ٥٠٠ وحـدة يمكن إنتاجها . ويمكن تقسيم الميزانية بين (أ ، ب) وتظهر النتائج بالخط (حـ ى) وتشير استقامة الخط (حـ ى) إن إنتاج كلا السلاحين يخضع لشروط ثبـات وحدة التكلفة .

والقرار الصحيح هو بالطبع التخطيط لاستخدام السلاحين بالنسبة المبينة بالنقطة (م) فإذا حددت الميزانية فإن النسبة الممكنة هى تلك التى تقع على خط سواء التكلفة (حـ د) ومن هذا المضمون غالباً ما يعرف الخط بمنحنى التبادل ExChange Curve وأى نسب خلاف النسب المرتبطة بالنقطة (هـ) تعنى فعالية أقل فى التدمير بمعنى أن الأسلحة تضيف أهدافاً أقل . ومن ثم فان النقطة (هـ) تبين كيف يمكن الحصول على أقصى ما يمكن الحصول عليه من انفاق النقود .

وطبيعى أن أى تعديل فى الأسلحة سيغير من أشكال ومواقع منحنيات سواء الانتاج . كذلك فان اختلاف الميزانية سيغير خـط سواء التـكلفة . وبالتالى ستنتقل النقطة المثلى (هـ) .

وهذا المثال بسيط بعرض حالة مدخلين فقط وسلعتين فقط . . والحقيقة أنه لا يمكننا استخدام التحليل البيانى فى معالجة النماذج الأكثر تعقيداً والتى تستخدم أكثر من مدخلين وسلعتين ، فمثل هذه النماذج تحتاج إلى تحليل رياضى متقدم .

الفصل الثامن

دوال التكاليف

نناقش فى هـذا الفصل العلاقات القائمة بين التغيرات فى تكاليف المنشأة والتغيرات فى إنتاجها فقرارات المنشأة حول تحديد حجم الإنتاج الذى يعظم أرباحها يعتمد على تكاليفها وإيراداتها .

دوال التكاليف .

تعرف العلاقة بين التكاليف والإنتاج ؛ عامة . «بدالة التكاليف» . وتحدد دالة الإنتاج وأسعار المدخلات دالة التكاليف المنشأة . ولما كانت دالة الإنتاج تأخذ صور مختلفة منها الدوال التى تعتمد على مدخل متغير واحد ومنها دوال لها بعض المدخلات المتغيرة فكذلك تأخذ دوال التكلفة عدة صور مختلفة . وتركز نظرية السعر معظم إنتباهها إلى نوعين من دوال التكلفة ـ داله التكلفة فى الأجل القصير ودالة التكلفة فى الأجل الطويل . وتظهر هذه الدوال بيانيا منحنيات التكلفة القصيرة الأجل والطويلة الأجل .

الأجل القصير والأجل الطويل .

فى الأجل القصير بعض المدخلات يكون ثابت ، حيث تستطيع المنشأة التوسع أو الحد من إنتاجها عن طريق تغيير كميات المدخلات الأخرى . ويتراوح إنتاج المنشاة من الصفر عندما تغلق المنشأة أبوابها ، إلى أن يصل إلى أقصى حجم تسمح به عوامل الإنتاج الثابتة (طاقة المشروع) . وفى الأجل الطويل تكون كل المدخلات متغيرة . ويتراوح حجم إنتاج المنشأة من الصفر إلى كميات كبيرة ليس لها حدود .

والأجل القصير والأجل الطويل ليس لهما فترة محددة من الزمن . ولكنها تخضع لمجموعة من الظروف وليست تعبر عن فترات زمنية على الاطلاق . ولايعنى ذلك أننا نستطيع أن نترك فكرة الزمن جانبا من تحليل الأجل القصير والطويل فبالرغم من عدم الاشارة إلى فترة زمنية محددة ، إلا أنها تكمن من خلف التحليل وكفكرة يتعين مواجهتها والعوامل الثابتة للمنشأة ، فى الأجل القصير ، تتمثل فى المعدات والآت والمبانى والتجهيزات ويضاف إليها فى بعض الصناعات بعض أنواع العمل الماهر الفريد من نوعه . وعندما تكون الآلات والمعدات والمبانى والتجهيزات كبيرة ومقعده ، تستلزم استثمارات مكثفة كبيرة وتحتاج فى تشييدها إلى فترة زمنية طولها عامان أو أكثر فإن الأجل القصير يمتد فى هذه الحالة إلى عدة سنوات كذلك قد يكون طول الأجل قصير عدة أسابيع ، إذا كان تدبير الحصول على المزيد من المعدات والآلات والعمالة الماهرة سهلا ميسورا وعندما تكون تكاليف البناء متواضعة أو غاية فى الصغر . مثال ذلك عمليات المقاصة والشحن . وبالمثل يتفاوت طول فترة الأجل الطويل فقد تكون الفترة طويلة تمتد إلى عقدين أو ثلاثة من الزمان وقد تكون قصيرة لاتتجاوز عدة أسابيع . ومثال الأجل الطويل الذى يستغرق فترة زمنية قصيرة مشروعات العلاقات العامة والتى لاتحتاج إلا إلى مجرد تأثيث مكتب ، عادى وبعض الآلات البسيطة وتدبير مكان يقام عليه المشروع . وتستخدم عمالة غير متخصصة معظمها من رجال الصحافة والإعلان . ويمكن لمثل هذه المشروعات أن تتوسع أو تنكمش فى المدن الكبيرة مع اتساع حجم النشاط وسرعته وسهولته .

ولايصح القول بأن العمل مدخل متغير فى جميع الأحوال وأن المعدات مدخل ثابت باستمرار ففى المشروعات التى تختص بالخدمات المحلية. مثل النقل الداخلى بالطائرات نجد أنه يمكن التوسع فى أسطول الطائرات بشكل أسرع من الحصول على طاقم الطيارين الذين يعملون عليها .

فهناك سوق تنافسى فى سوق الطائرات المستعملة ، كذلك يوجد سوق دولى تؤجر فيه شركات الطيران طائرات لبعضها البعض وعلى نقيض ذلك نجد أن التوسع فى تكوين الكوادر من الطيارين ومساعديهم يسير ببطء شديد .

فيمكن ، استئجارهم بسرعة ، ولكن قبل أن يطيروا بكفاءة يتعين على الطيارين الجدد التعرف على الطرق والطائرات التى سيستخدمونها وإجراءات النقل . وكل ذلك يحتاج إلى وقت أطول من ذلك الوقت الذى يستغرق الحصول على مزيد من الطائرات . ولهذا قد يكون العمل مدخل ثابت .

وقد لا يكون هناك فيصل محدد يفرق بين الأجل القصير وبين الأجل الطويل بل يكون هناك خيط رفيع يفصل بينهما . ومهما يكن التعبير عن الاجلين سواء كان ذلك فى صورة مجموعة من الظروف أو فى شكل فترات زمنية فإن كلاهما يندمج فى الآخر .

منحنيات التكاليف فى الأجل القصير

تنقسم تكاليف المنشأة فى الأجل القصير ، إلى تكاليف ثابتة وتكاليف متغيرة والتكاليف الثابتة هى تلك التكاليف التى ترتبط بطاقة المشروع الثابتة ومعدات المنشأة . وأوضح طريقة لتعريف التكاليف الثابتة هو القول بأنها التكاليف التى تستمر المنشأة فى تحملها بأ كلها إذا توقفت المنشأة مؤقتا عن العمل ، ولا تنتج شيئا على الاطلاق . وتتضمن التكاليف الثابتة الفوائد على استثمار المشروع فى الآلات والمعدات وجميع أنوع التأمين والضرائب على الممتلكات والأهلاك والصيانة .. الخ ، بالإضافة إلى أجور ومهايا الأفراد الذين يستمرون فى العمل فى حالة توقف المنشاة ، مؤقتا عن العمل كذلك تشمل التكاليف الثابتة نفقة الفرصة البديلة لأصحاب المنشاة والأرباح العادية .

والتكاليف المتغيرة هى التكاليف التى تتغير تبعا لتغير حجم الإنتاج . وتحتوى على الأجور وثمن المواد الخام والسلع الأخرى التى تشتريها المنشاة وثمن

الوقود وضرائب الإنتاج وأسعار الفائدة على القروض قصيرة الأجل وغير ذلك
ولقد أعدت كثير من النظم لتبويب التكاليف ولكن من الناحية العملية يصعب فى بعض الأحيان الجزم فيما إذا كانت أحد النفقات تتبع مجموعة التكاليف الثابتة أم تتبع مجموعة التكاليف المتغيرة ، ولكن التحليل الاقتصادى ترك كل هذه الصعوبات جانبا ليبقى تفسيراته على التقسيم البسيط لمجموعتى التكاليف .

ثبات متوسط التكلفة المتغيرة Consiant averag Variable Cost

إن أبسط العلاقات بين التكلفة والإنتاج لمنشأة من المنشآت فى الأجل القصير تنطوى على الافتراض أن متوسط التكلفة المتغيرة (أى التكلفة المتغيرة بالنسبة للوحدة) ثابتا — أى أن متوسط التكلفة المتغيرة للوحدة يظل على ما هو عليه مهما تغير حجم الإنتاج . ويعنى ذلك أننا نتعامل فى هذه الحالة مع دالة إنتاج مدخلاتها المتغيرة (العمل والمواد) تعمل مع بعضها البعض فى ظل ظروف ثبات الغلة . ولنفرض كمثال لذلك أن التكاليف الثابتة لمنشأة من المنشآت هى ١٠٠٠ جنيه وتكلفة العمل والمواد هى ٥٠ قرش لكل وحده منتجة . وعلى ضوء هذه المعلومات يمكننا إعداد جدول للتكاليف على الشكل المبين بالجدول (٨–١)

جدول (٨ — ١)

جدول مبسط التكاليف قصيرة الأجل

الإنتاج بالوحدة	إجمالى التكاليف الثابتة	متوسط التكاليف المتغيرة	إجمالى التكاليف المتغيرة	التكاليف الكلية	متوسط التكاليف
—	١٠٠٠ جنيه	— جنية	— جنيه	١٠٠٠ جنيه	—
١٠٠٠	١٠٠٠ «	٥٠ر – «	٥٠٠	١٥٠٠ «	٥ر١ جنيه
٢٠٠٠	١٠٠٠ «	٥٠ر – «	١٠٠٠	٢٠٠٠ «	١ر – «
٣٠٠٠	١٠٠٠ «	٥٠ر – «	١٥٠٠	٢٥٠٠ «	٨٣ر – «

ولما كان متوسط التكاليف المتغيرة فى الجدول (٨ — ١) ثابت فإن إجمالى التكاليف المتغيرة يزيد بالتناسب مع حجم الإنتاج . وتبلغ التكاليف الثابتة ١٠٠٠ جنيه عندما لا تنتج المنشأة أى شيء (حجم الإنتاج = صفر) وتظل كما هى عند أى مستوى من مستويات الإنتاج . وكلما زاد حجم الإنتاج كلما انخفضت التكلفة الثابتة للوحدة لأن التكاليف الثابتة تتوزع فى هذه الحالة على عدد أكبر من الوحدات . ويبين العمود الأخير من الجدول (٨ — ١) إنخفاض متوسط التكاليف (التكلفة المتوسط) .

وتشير التكلفة المتوسطة إلى إجمالى التكاليف بالنسبة للوحدة .

وتساوى التكلفة المتوسطة متوسط التكاليف الثابتة بالإضافة إلى متوسط التكاليف المتغيرة أى أن :

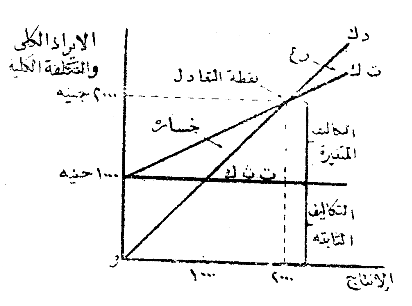
م ت = م ت ث + م ت غ

ويلاحظ أنه عندما يكون متوسط التكاليف المتغيرة ثابت فإن التكاليف الإضافية لإنتاج وحده إضافية أى التكاليف الحديه واحدة بنفس المبلغ من النقود . وبعبارة أخرى ؛ فإن متوسط التكاليف المتغيرة تكون مساوية للتكلفة الحدية عندما تكون الاولى ثابتة .

نقطة التعادل :

وبالرغم من بساطه الجدول (٨ — ١) إلا أنه لا يبعد عن الحقيقة . فتفكير رجال الأعمال وصانعى القرارات يعتمد على علاقات على نفس القدر من البساطه . وخريطة التعادل التى شاع استخدامها فى مجال التحليل المالى للمشروعات تبنى عن نفس العلاقات . والمعلومه الإضافية الوحيدة التى نحتاجها

لتكوين خريطة التعادل هو سعر البيع . ولنفرض ، مثلا ، أن نفس المنشأة تبيع منتجاتها بسعر جنيه واحد للوحدة وتحصل على هذا السعر بصرف النظر عن الوحدات المباعة (بمعنى أن الطلب على منتجات هذه المنشاة مرن مرونه تامه) .



شكل (٨ – ١) خريطة التعادل

ويصور الشكل (٨ – ١) خريطة تعادل مبينة على البيانات الموضحة بالجدول (٨ – ١) وعلى أساس أن سعر بيع الوحدة جنيه واحد . ويبين الخط ذلك الإيراد الكلى عند أى مستوى من مستويات من الإنتاج – وهو يمثل سعر البيع (جنيه واحد) مضروبا فى عدد وحدات الإنتاج . ويظهر خط التكاليف الثابتة الكلية (ت ث ك) أفقى عند مستوى الإنتاج ١٠٠٠ جنيه . ويبين الخط ت ك التكاليف الكلية الثابتة زائدة المتغيرة . ويبدأ خط التكاليف الكلية من مستوى الإنتاج ١٠٠٠ جنيه مما يعنى أن التكاليف المتغيرة الكلية تعادل إلى التكلفة الثابتة . ونقطة التعادل هى نقطة تقاطع د ك مع ت ك . وعندما يبلغ مستوى الإنتاج ٢٠٠٠ وحدة يكون الايراد الكلى ٢٠٠٠ جنيه والتكاليف الكلية ٢٠٠٠ جنيه كذلك . لذلك فإن أى مستوى من مستويات الانتاج يزيد

على ذلك تحقق ربح بينما تحقق المستويات الأقل خسارة وتمثل خريطة التعادل الموضحة بالشكل (٨ ـ ١) أحد صور هذه الإدارة التحليلية . وهى ذات فائدة فى التطبيق العملى لأنها توضح موقف المنشأة بمجرد النظر إلى هذه الخريطة . كذلك فإن أرقام التكاليف من الصعب حسابها فى الحياة العملية . كذلك هناك شك يحيط عملية اختيار وتحديد البنود التى تندرج تحت التكاليف الثابتة وتلك التى تضاف إلى التكاليف المتغيرة .

ومن ثم فإنه عندما تجد منشأة من المنشآت أنها تعمل بالقرب من نقطة التعادل ، فقد يرى القائمين بإدارتها ضرورة البحث عن إمكانية تخفيض التكاليف أوحتى إعادة حسابها . وقد يحاولون البحث عن وسائل يتبعونها لزيادة المبيعات .

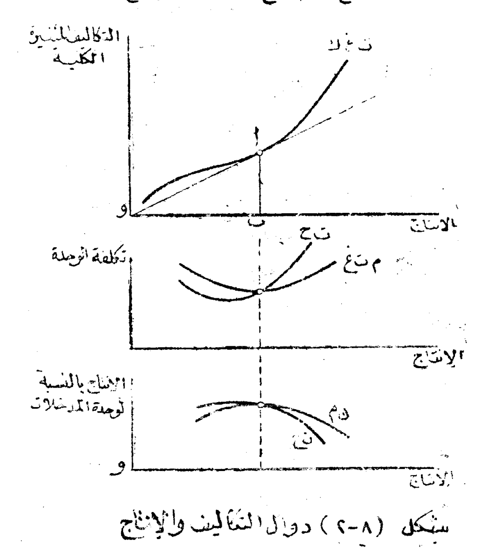
وتصور خريطة السوداء ، العادة ، باستخدام خطوط مستقيمة بالرغم من أنه ليست هناك مايحتم أن تكون منحنيات التكلفة أو الإيراد على شكل خطوط مستقيمة ولكن هذا الأسلوب استخدام خطوط مستقيمة يعنى أن التغرات فى التكاليف الاجمالية تتناسب مع التغيرات فى الإنتاج . والحقيقة أنه بالنسبة للتغيرات الصغيرة فى الإنتاج أعلى أو أسفل نقطة التعادل يكون الافتراض صحيحا أو قريبا من العلاقة الحقيقة التى يمكن تبريرها . ولا تميل المنشأة إلى اقرار تلك العلاقات بين التكلفة والإنتاج عند مستويات الإنتاج الصغيرة والكبيرة جدا عندما تقع خارج الواقع المألوف فى الحياة العملية أو ماهو متوقع . ولكن لماذا ترسم الخطوط المستقيمة على طول المدى إذا ؟ أنه لهذا السبب لا يجب أن تغلق أهمية على ماهو ظاهر ينافى الواقع : فمنطقة الربحية تضطرد فى النمو ، دون حدود ، كلما زاد الإنتاج عن مستوى التعادل .

ازدواج دوال التكاليف ودوال الإنتاج

إن دوال التكاليف ودوال الإنتاج « ثنائيان » بمعنى أن كل منهما انعكاس مرآة للاخر إذ يمكن تحويل أحدهما للآخر . ولعلنا نوضح ذلك بيانيا فى الشكل

(٨ ـ ٢) الذى يبين منحنى التكاليف المتغيرة الكلية (ت غ ك) ، و نظرة إلى هذا المنحنى تبين أنه فى ذات منحنى الناتج الكلى الموضح بالشكل (٥ ـ ٧) بصفحة ١٧٢ ولكنه مقلوب باستثناء ذلك الجزء المتناقص من منحنى الناتج الكلى. كذلك فإن ميل المنحنى ت ع ك (التكاليف المتغيرة الكلية) هو التكلفة الحديه ت ح . ولقد أشرنا إلى ميل المنحنى ت ع ك فى الشكل (٨ ـ ٢) عند النقطة ا على المنحنى وعند النقطة ا يكون ميل ت ع ك هو ا ب / و ب والذى يمثل التكلفة الحدية للعدد و ب وحدة من الانتاج ولكن ا ب / و ب تمثل كذلك متوسط التكلفة المتغيرة للعدد و ب من وحدات الإنتاج .

حيث ا ب التكلفة المتغيرة الكلية لعدد الوحدات و ب ـ و بقسمته على و ب يعطى المتوسط . لذلك فإن ت ح = م ت ع عند مستوى الإنتاج و ب بالشكل (٨ ـ ٢)



شكل (٨-٢) دوال التكاليف والإنتاج

الجدول (٨ — ٢)

ازدواجية دوال الإنتاج ودوال التكاليف

دوال الإنتاج	دوال التكاليف
النظير :	
ن ك — الناتج الكلى	ت ع ك — التكلفة المتغيرة الكلية
ن م — الناتج المتوسط	م ت ع — متوسط التكلفة المتغيرة
ن ح — الناتج الحدى	ت ح — التكلفة الحدية
العلاقات :	
١ - يرتفع ن ك أولا بمعدل متزايد ثم يرتفع بمعدل متناقص بعد ذلك .	١ - ترتفع ت ع ك بمعدل متناقص أولا ثم بمعدل متزايد بعد ذلك .
٢ - يرتفع ن م حتى يصل إلى أقصاه ثم ينخفض بعد ذلك .	٢ - تنخفض م ت ع لتصل إلى أدناها ثم ترتفع بعد ذلك .
٣ - يرتفع ن ح ثم ينخفض ليتقاطع مع ن م عندما يصل ن م إلى أقصاه ثم يستمر ن ح فى الانخفاض بمعدل اسرع من ن م .	٣ - تنخفض ت ح ثم ترتفع لتتقاطع مع م ت ع عندما تصل م ت ع إلى أدناها ثم تستمر ت ح فى الارتفاع بمعدل أسرع من م ت ع

وعندما تتقاطع منحنى التكلفة الحدية مع منحنى متوسط التكلفة المتغيرة أى أن ت ح = م ت ع تصل م ت ع إلى أدناها . ويمكن التأكد من هذه الحقيقة بالنظر إلى الشكل (٨ - ٢) . ويجب ملاحظة أن أى خط مستقيم ينطلق من نقطة الأصل ليتقاطع مع منحنى ت ع ك لابد وأن يكون أكثر انحدارا من الخط و ا ومن ثم لابد وأن يمثل متوسط تكلفة متغيرة أكبر .

ويعطى الجدول (٨ - ٢) ملخصا للعلاقات القائمة بين دوال الإنتاج ودوال التكاليف المتغيرة .

ويلاحظ أن الشكل (٨ — ٢) لم يتضمن التكاليف الثابتة .

ويمكننا إضافة التكاليف الثابتة إلى هذا الشكل .. إلا أننا فى هذه الحالة سوف نحرك منحنى ت ع ك إلى أعلى (وشكل موازى لوضعه الحالى) إلى مسافة تساوى حجم التكاليف الثابتة .

منحنيات التكاليف التقليدية :

إن منحنيات التكاليف القصيرة الأجل المتعارف عليها لمنشأة من المنشآت ، منحنيات ممهده ومستمرة للتكاليف بالنسبة لوحدة الإنتاج . ويمكن التمييز بين أربعة منحنيات . فإذا فرضنا أن ط تمثل الإنتاج اليومى أو الأسبوعى أو الإنتاج لأى فترة مناسبة من الزمن .

ولنفرض أن ت غ ك ترمز إلى التكاليف المتغيرة الفعلية ، ت ث ك إلى التكاليف الثابتة الكلية ، ت ك إلى التكاليف الكلية ، فان :

متوسط التكلفة المتغيرة م ت ع $= \dfrac{\text{ت ع ك}}{\text{ط}}$

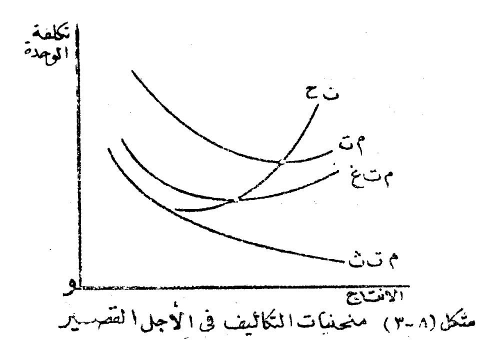
، « « الثابتة م ب ث $= \dfrac{\text{ت ث ك}}{\text{ط}}$

، التكلفة الحدية ت ح $= \dfrac{\triangle \text{ ت ع ك}}{\triangle \text{ ط}}$

، التكلفة المتوسطة ت م $= \dfrac{\text{ت ك}}{\text{ط}} = \dfrac{\text{ت ع ك}}{\text{ط}} + \dfrac{\text{ت ث ك}}{\text{ط}}$

وتظهر منحنيات التكاليف الأربعة فى الشكل (٨ ــ ٣) وهى تمثل الشكل البيانى التقليدى المعروف لمنحنيات تكاليف المنشأة فى الأجل القصير وسوف نعرض منحنيات التكاليف الأخرى تباعا ولاشك أن الشكل (٨ ــ ٣) يصور مجموعة متكاملة من تكاليف المنشأة . ويظهر منحنى م ت ث على شكل قطع زائد مكافئ[1] يتقارب مع الاحداثين ولكنه لا يتقاطع معها . وتكون التكاليف الثابتة مرتفعة عند مستويات الإنتاج المنخفضة ، وتنخفض عندما يرتفع مستوى الإنتاج . ويظهر المنحنى م ت ث على شكل قطع زائد مكافىء لأن متوسط التكلفة الثابتة مضروبا فى حجم الإنتاج يعطى رقما ثابتا باستمرار (وهو يمثل التكاليف الثابتة للمنشأة) .

والمنحنيات الأخرى التى تظهر بالشكل (٨ ــ ٣) تأخذ شكل حرف U . ويلاحظ كذلك أن منحنى التكلفة الحدية ت ح يتقاطع مع منحنى التكلفة المتوسطة ت م عندما تصل الأخيرة إلى أدنى نقطة . وتفسير ذلك يتوازى مع ذلك التفسير الخاص بتقاطع منحنى التكلفة الحدية ت ح مع أدنى نقطة على منحنى م ت ع (وسوف نثبت عندما يتعرض للتحليل الرياضى فى هذا الجزء من الكتاب .



شكل (٨ ــ ٣) منحنيات التكاليف فى الأجل القصير

---

(١) من صفات القطع الزائد المكافىء أنه يتقارب مع الأحداثى الأفقى والأحداثى الرأس ولكنه لا يتقاطع معهما . والصفة الثانية أن حاصل ضرب البعد عن الأحداثى الأفقى فى البعد عن الأحداثى الرأس يعطى رقما ثابتا .

والتكلفة الحدية مستقلة عن التكلفة الثابتة . ومهما يكن من أمر التكاليف الثابتة سواء بلغت ١٠٠٠ جنيه أو عشرة ملايين من الجنيهات فإن التكاليف الحدية لن تتأثر . وكما هو معروف فإن التكلفة الحدية هي الإضافة إلى التكاليف الكلية نتيجة لإنتاج وحدة أخرى من المنتج . ولعلنا نلاحظ أن إنتاج وحدة إضافية لا يتسبب فى إضافة أى شىء إلى التكاليف الثابتة . فالتكلفة الحدية ترتبط فقط بالتكاليف المتغيرة (٥) .

وكما هو شأن المنطقة التى تقع أسفل منحنى المنفعة الحدية حيث تساوى المنفعة الكلية للكمية موضوع البحث ، كذلك فإن المنطقة التى تقع أسفل منحنى التكلفة الحدية تساوى التكلفة المتغيرة الكلية . وإذا اخترنا أى مستوى من الإنتاج ولتكن ط . وقمنا برسم خط مستقيم من منحنى التكلفة الحدية ليصل إلى ط ، فإن هذا الخط هو التكلفة الحدية لـ ط .

ويمكن أن نتخيل أن هذا الخط عبارة عن شعاع أو خط رفيع جداً . وبجواره على اليسار يوجد خط رفيع آخر هو التكلفة الحدية لـ (ط — ١) وحده . وبجوار ذلك يوجد خط آخر هو التكلفة الحدية للوحدات (ط – ٢) . . وهكذا وتندمج كل هذه الخطوط الرفيعة لتكون منطقة تمثل التكلفة المتغيرة الكلية لمستوى الإنتاج ط .

ولقد سبق الإشارة إلى النقاط الدنيا من المنحنيات م ت ع و ت م أكثر

---

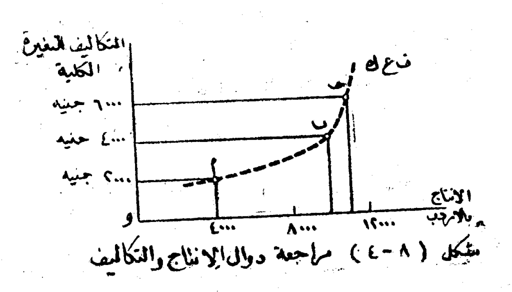
(٥) ولإثبات استقلال التكلفة الحدية عن التكاليف الثابتة نلاحظ أن على اعتبار أن ط تعبر عن أى مستوى من مستويات الإنتاج .

ت ح (ط) = ت ك (ط) — ت ك (ط – ١) .

= [ت ع ك (ط) + ت ث ك] – [ت ع ك (ط–١) + ت ث ك]

= ت ع ك (ط)   ت ع ك (ط – ١) .

من مرة . ولكن كل هذه النقاط على هذه المنحنيات ، وكذلك على المنحنى ت ح هى أدنى نقط لأحجام الإنتاج التى تناظرها .



شكل (٨ - ٤) مراجعة دوال الإنتاج والتكاليف

وهنا نعود مرة أخرى إلى دالة الإنتاج ، ولكننا سنتحدث هذه المرة على دالة الإنتاج مستخدمين سواء الإنتاج وتابع أزدواجها وثنائيتها مع دالة الإنتاج . وتظهر هذه الازدواجية فى الشكل (٨ — ٤) حيث يتكون الجزء العلوى الشكل من ثلاثة منحنيات سواء الإنتاج كونت من دالة إنتاج أرادب حبوب ، مستخدمة البذور (بالكيلو) والأسمدة كمدخلات . كذلك يعرض الشكل خطوط سواء التكلفة Isocost . وتمثل النقط ا ، ب ، حـ أدنى تكلفة للثلاثة مستويات من الإنتاج . ولقد أعيد ترتيب المعلومات الواردة عن دالة الإنتاج فى الجزء العلوى من الشكل (٨ — ٤)) مرة أخرى فى الجزء السفلى من الشكل لتبين دالة التكاليف أى التكاليف المتغيرة الكلية . وتقع النقاط ا ، ب ، حـ فى هذه الحالة على المنحنى ت ع ك . ومن الطبيعى أن هذه النقاط الثلاث لا تكفى لتحديد المنحنى ت ع ك كما هو موضح بالشكل . ولكنها يمكن معها عرض منحنيات إضافية لسواء الإنتاج وسواء التكلفة والنقط الدنيا للتكاليف والتى يمكن استخدامها فى الحصول على مزيد من النقط الواقعة على منحنى ت ع ك .

الأنواع الأخرى من المنحنيات قصيرة الأجل :

هناك رأى يقول إذا كان هناك منحنى واحد لتكاليف منشأة من المنشآت فى الأجل القصير يستحق الدراسة .. فإنه سيكون منحنى التكاليف المبين بالشكل (٨ - ٣) - والذى يحتوى على مجموعة مترابطة من المنحنيات . ويمكن النظر إلى منحنيات التكاليف المختلفة لملايين المنشآت على أنها منحنيات غاية فى التنوع ولكنها جميعاً تخضع لتعميم واحد .

ومتوسط تكاليف منشأة تعمل فى الأجل القصير يستمر فى الانخفاض حتى يصل الحد الأدنى ويبدأ بعد ذلك فى الارتفاع . وتعتمد درجة انخفاضه على نسبة التكاليف الثابتة إلى التكاليف الكلية ، فكلما كانت هذه النسبة كبيرة فإن الانخفاض فى متوسط التكاليف يكون سريعا ، ومستوى الانتاج الذى تصل متوسط تكلفته إلى الحد الأدنى يسمى إنتاج الطاقة Capacity output (*) . والطاقة هنا لا تعنى الطاقة القصوى ولكنها تعنى حجم الانتاج طبقاً للتصميمات ، فالمهندسون يقومون بتصميم المصنع لإنتاج عدد معين من الوحدات فى الأسبوع أو فى الشهر بأقل تكلفة للوحدة . فإذا تم تشغيل مصنع بمعدل ٨٠٪ من هذا المستوى من الإنتاج المصمم ، فإن المصنع يكون قد استخدم ٨٠٪ من طاقته .. وتسمى هذه النسبة بمعدل استخدام الطاقة Rate of capacity utilization . ويكون متوسط التكلفة أكثر ارتفاعا بالنسبة لمستويات الإنتاج الأقل من إنتاج الطاقة (الإنتاج المصمم) ويكون متوسط التكلفة مرتفعا كذلك بالنسبة للمستويات

(*) يعرف بعض الاقتصاديين هذا المستوى بحجم الإنتاج الأمثل Optimum ولكن هذا التعريف مضلل إذ يوحى بأن المنشأة تسعى دائماً للإنتاج عند هذا المستوى . ولكن المنشأة فى الحقيقة تود أن تصل إلى هذا المستوى من الإنتاج عندما يتطابق هذا المستوى مع حجم الإنتاج الذى يعظم الأرباح .

الأعلى منه . لذلك فإن منحنى متوسط التكاليف يأخذ شكل حرف (U) باستمرار . وقد يكون جانبي شكل المنحنى (U) شديدة الانحدار . وقد تكون قريبة من الاستواء .

فإذا تصادف وكان إنتاج الطاقة (أى الانتاج عند أدنى التكلفة) هو المستوى الذى يصل فيه الانتاج إلى الحد النهائى مما يستحيل زيادة مستوى الانتاج عن هذا الحد ، فإن منحنى م ت غ ومنحنى ت ح يرتفعان رأسيا عند مستوى إنتاج الطاقة .

ولا يعنى ذلك أن منحنيات متوسط التكاليف المتغيرة والتكاليف الحدية لا بد وأن تكون ممهدة فى شكل حرف U كما هى ماثلة فى الشكل (٨ — ٣) ولكن الحقيقة أن كلا المنحنيين ربما يكونان أفقيين لمدى طويل من مستويات الانتاج .

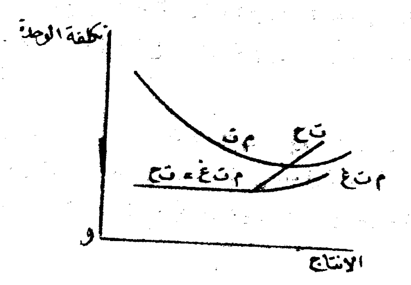
وعندئذ يتساوى متوسط التكاليف المتغيرة (م ت غ) مع التكاليف الحدية (ت ح) .

ولذلك عندما يكون منحنى م ت ع أفقياً يكون متوسط التكاليف المتغيرة ثابتاً . أى أن الوحدة الاضافية من الانتاج يكون لها نفس متوسط التكاليف المتغيرة وبالتالى يكون لها نفس التكلفة الحدية .

ويمكن أن تشترك المدخلات الثابتة المنشأة (المصنع ومعداته) مع المدخلات المتغيرة بنسب متغيرة أو بنسب ثابتة . ولقد اقتصرنا فى حديثنا حتى هذه اللحظة على افتراض امتزاج المدخلات بنسب متغيرة جريا وراء ما يحدث فى غالب الأحيان . ولكننا سننتقل الآن للحديث عن الحالات التى تكون فيها النسب ثابتة أى مثل الحالة التى يعمل فيها رجل واحد على آلة واحدة .

ويبين الشكل (٨ — ٥) ثبات م ت ع ، ت ح على طول مدى مستويات

مختلفة للانتاج . وعلى طول هذا المدى يكون العائد الحدى للمدخل المتغير ثابتاً . لذلك نجد أن كلا من الانتاج والتكاليف المتغيرة الكلية تزيد بنفس النسبة التى يزيد بها المدخل المتغير . ويلاحظ أن كلا من م ت غ ، ت ح ترتد إلى أعلى عند اليمين . وبعد نقطة معينة يبدأ العائد الحدى فى التناقص وتبدأ تكلفة الوحدة فى الارتفاع .



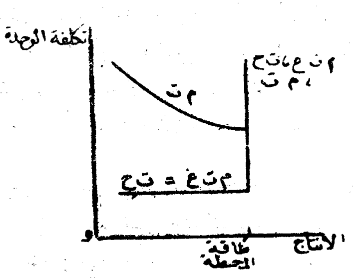
شكل (٨ـ ٥) المصنع القابل للتجزئة

ولقد أظهرت نتائج العديد من الدراسات العملية التى أجريت على دوال التكاليف فى الأجل القصير أن التكلفة الحدية تظل فى الحقيقة ثابتة على طول مدى من مستويات الانتاج أو قد تكون قريبة من الثبات .

وهناك أنواع أخرى من التكاليف فى الأجل القصير والتى تظهر ، فى غالب الأحيان فى الكتابات عن اقتصاديات المنافع العامة .

ففى فترة معينة من الزمن ، نجد محطة توليد القوى الكهربائية لها طاقة محددة لا تستطيع أن تتعداها . هذه الحقيقة تجعل المنحنيات م ت غ ، ت ح ، م ت تتحول فجأة إلى الاتجاه الأفقى عندما يصل الانتاج إلى الطاقة . ويبين الشكل (٨ – ٦) هذا النوع من دوال التكاليف قصيرة الأجل .

[illegible] أخرى من محطات توليد الكهرباء وقد تبين أن متوسط التكاليف المتغيرة يكون جانبا صغيرا من التكاليف الكلية للوحدة المنتجة . ويعكس ذلك ضخامة التكاليف الثابتة ، ويلاحظ أن منحنى م ت يقع أعلى منحنى م ت غ ومنحنى ت ح .



شكل (٨-٦) منحنيات التكاليف لمحطة توليد الكهرباء في الأجل القصير

منحنى الكشف والمعرفة The Learning Curve :

لقد عرضنا حتى الآن منحنيات التكاليف تبين لنا عند كل نقطة أدنى تكلفة للانتاج موضوع البحث . ذلك لأننا نتعامل مع نقط تماس خطوط سواء التكلفة مع منحنيات سواء الانتاج . ويعني التماس هنا تدنية التكاليف . ونحن نذكر أن منحنيات سواء الإنتاج تمثل أقصى الانتاج الذى يمكن الحصول عليه من المجموعات المختلفة من مدخلات العمل ورأس المال .

ولكن الدفعة الأولى من سلعة جديدة تنتج لأول مرة باستخدام تكنولوجيا جديدة تكون تكلفة إنتاج الوحدة منها أعلى من تكلفة الوحدة من الدفعات التى تنتج فيما بعد بعد أن يتعود المنتج على أساليب

انتاجها ويتعرف على أسرارها . ومثال ذلك نشير إلى إنتاج التليفزيون الملون عندما قدم لأول مرة فقد كان غالبية الناس يعتقدون أن تكلفة إنتاج الوحدة سوف تنخفض فى المستقبل وتساهم بذلك فى خفض سعر التجزئة .

ولقد كان التقدم المذهل فى التكنولوجيا الحديثة بعد الحرب العالمية الثانية مع نمو استخدام أساليب التحليل وجهت الانتباه إلى تكاليف المنتجات الجديدة . ويمثل منحنى الكشف أو المعرفة تعميم لهذه التكاليف . وهذا التعبير استنبط من علم النفس ، ولقد وجد أن الحيوان ، الأرنب أو الرجل يتعلم بعض الشيء بمعدل معين عن طريق تكرار المحاولة « التجربة والخطأ » .

كذلك يعرف ما يسمى « بمنحنى التقدم Progress Curve » بمنحنى الكشف الذى يبين انخفاض فى تكاليف الوحدة كلما زاد • عدد الوحدات المنتجة • ولقد وضح بالتجربة فى صناعة الطيران أن منحنى الكشف الذى وجد فى هذه الصناعة هو « منحنى ٨٠٪ » • ويعنى ذلك أنه بمضاعفة العدد المنتج تنخفض التكاليف بنحو ٨٠٪ من المستوى السابق • وأرقام التكاليف المستخدمة فى الحياة العملية تختص فى العادة بالعمل المباشر فقط أى أنها تمثل جزءاً من التكاليف المتغيرة . ومثال لذلك .

نفرض أننا أنتجنا أول ٥٠٠ وحدة بتكلفة (أجور ومهايا) ١٠٠ جنيه للوحدة • وانخفضت تكلفة الوحدة للألف وحدة إلى ٨٠ جنيه ، وعندما يصل الإنتاج الى ٢٠٠٠ وحدة فإن تكلفة الوحدة تصبح ٦٤ جنيه (٨٠٪ من ٨٠ جنيه) •• وهكذا تستمر التكلفة فى الانخفاض إلى أن تصل إلى حد معين لا تنخفض بعده •

وعملية الكشف هذه هى أحد العمليات التى يكتسب فيها المنتج معلومات أكثر عن الأعمال التى يقوم بها وتصبح مألوفة لديه وكذلك يتعرف على الأدوات

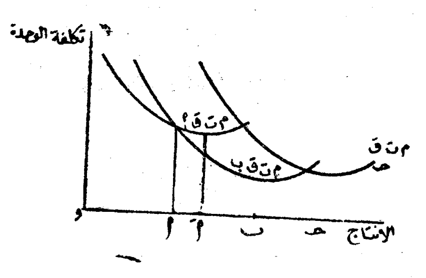
الحديثة والإجراءات والأساليب الجديدة والتنسيق الحديث فى العملية الانتاجية . وليس ضرورياً أن يكون منحنى الكشف ٨٠٪ فى جميع الأحوال ولكنه فى العادة يتراوح ما بين ٧٥٪ و ٩٠٪ . ولقد أوضحت التجربة أن تحليل هذا النوع من المنحنيات يمكن استخدامه فى التنبؤ . ولهذا إذا حصلت إحدى الشركات على طلبية قدرها ١٠٠٠٠ وحده مثلا من معدات جديدة ، فإن المحلل يستطيع أن يكون تقديراً جيداً لتكاليف إنتاج الـ ١٠٠٠٠ وحدة بعد أن يحصل على معلومة حول تكاليف إنتاج الوحدة المائة .

منحنيات التكاليف فى الأجل الطويل :

إن كل شيء يكون متغير فى الأجل الطويل . . ولا تحتوى دالة الانتاج للمنشأة من المنشآت على أية مدخلات ثابتة . . ولا توجد تكاليف ثابتة للمنشأة . وتستطيع المنشأة ، فى الأجل الطويل ، أن تتوسع فى الانتاج بانشاء وتشغيل مصنع جديد أكبر حجما . . فلديها الفرصة للتوسع فى نطاق المشروع وزيادة طاقته الانتاجية . وتتبع علاقة المدخلات بالمخرجات فى دالة الانتاج مبدأ العائد حسب الحجم .

ويصور الشكل (٨ ـ ٧) ثلاث منحنيات للتكاليف فى الأجل القصير . ويرمز لمنحنيات التكاليف المتوسطة فى هذه الحالة بالرمز م ت ق أى متوسط التكاليف فى الأجل القصير . والمنحنيات التى تظهر بالشكل (٨ ـ ٧) تمثل ثلاثة أحجام مختلفة للوحدة الانتاجية من حيث الوحدة أ الأصغر حجماً وتكاليف م ت ق م . والوحدة الانتاجية ب أكبر حجما وتعمل بتكاليف أقل بكثير من تكاليف الوحدة أ . . ويظهر ذلك واضحاً فى الشكل حيث نرى أن المنحنى م ت ق م ينخفض كثيراً عن المنحنى م ت ق م فى جميع أجزاءه باستثناء ذلك الجزء الواقع فى نهاية الطرف الأيسر من المنحنى كذلك فان حجم

الوحدة الانتاجية حـ أكبر من ا ، ب ولكن المنحنى م ت ق حـ أعلى لأن مرحلة تناقص الغله بدأت تظهر مع التوسع فى حجم الوحدة الانتاجية عن هـذا الحد فى الأجل القصير .



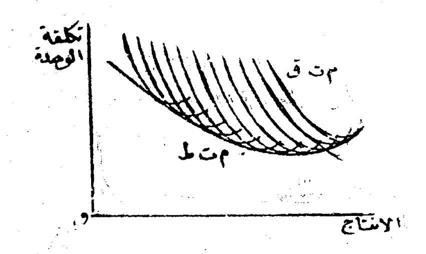
شكل (٨ ـ ٧) منحنيات التكاليف الثلاثة فى الأجل القصير

والواضح ، على ضوء ما تقدم ، أن المنشأة سوف تقوم ببناء وتشغيل المصنع ا (وهو أصغر وحدة إنتاجية) إذا كانت تتوقع أن يصل حجم إنتاجها إلى المستوى و اَ أو أقل . ولكن إذا قدر ، بدلا من ذلك ، أن يكون مستوى الإنتاج فى المدى و ب أو و حـ سيكون قرار المنشاة إختيار المصنع ب أو المصنع حـ . ويجدر ملاحظه أن المنشأة عندما تنتج عند مستوى أكبر من و ا ، فإنها ستختار المصنع ب لأن التكاليف فى هذه الوحدة الإنتاجية ستكون أقل . ولنفرض أن حجم الإنتاج المتوقع هو و اَ ، فلا شك أن هذا الحجم من الإنتاج يمثل حد الطاقة بالنسبة للمصنع ا ، وهو بذلك يمثل أدنى تكلفة لتشغيل المصنع ا ، والواضح أنه من الأفضل عند إنتاج الحجم و اَ تشغيل المصنع ب بأقل من طاقته الإنتاجية .

ويمكن تعميم هذه الحالة بالنسبة للوحدات الإنتاجية الأخرى فعندما تعمل

الوحدة الإنتاجية فى ظل مرحلة تزايد الغلة ، فإنه يمكن الوصول إلى أدنى تكلفة لأى إنتاج بتشغيل الوحدة الإنتاجية بأقل من طاقتها ، أى أننا نختار فى هذه الحالة حجم مصنع أكبر من الوحدة الإنتاجية التى يطابق مستوى الإنتاج المقترح أدنى تكلفة لها .

وإذا تخيلنا أن المنشأة تستطيع بناء العديد من المصانع كل منها يكبر قليلا عن سابقه . فان المنحنيات التى تمثل تكاليف هذه الوحدات فى الأجل القصير يظهر على النحو المبين بالشكل (٨ ـ ٨) وهى تمثل منحنيات م ت ق للوحدات الانتاجية المضطرده الزيادة فى أحجامها ، ويمثل المنحنى م ت ط متوسط التكاليف فى الأجل الطويل وهو المماس للأجزاء الدنيا من المنحنيات م ت ق . ويمثل المنحنى م ت ط الغلاف الذى يطوق منحنيات متوسط التكلفة فى الأجل القصير م ت ق .



شكل (٨ ـ ٨) استخراج منحنى التكلفة فى الأجل الطويل

وشأن غيرهم من الأفراد قد يقع أصحاب النظرية الاقتصادية فى بعض الأخطاء ومن أخطر هذه الأخطاء شيوعا فى كتابات نظرية الثمن ذلك الخطأ الذى ارتكبه جاكوب فاينر Viner فى مقالة المشهور الذى نشره فى عام ١٩٣١ وقدم فيه نظرية حديثة لمنحنيات

تكاليف المنشأة ، فقد كلف فاينز أحد الرسامين ، عبثا ، أن يحاول رسم خريطة بيانية فى مقاله يظهر فيها المنحنى م ت ى مماساً النقاط الدنيا من منحنيات متوسط التكلفة فى الأجل القصير م ت ى ، وهذا أمر ممكن فى حالة واحدة فقط ، وهى الحالة التى يكون فيها المنحنى م ت ط أفقياً ، ولكن عندما يكون المنحنى م ت ط متناقصاً فان نقط تماسه مع المنحنيات م ت ى ستكون بالضرورة على يسار النقط الدنيا ، وعندما يتجه المنحنى م ت ط إلى الارتفاع فانه يمس المنحنيات م ت ى على يمين النقاط الدنيا ، ولقد اعترف فاينز ، فيما بعد ، بالخطأ الذى وقع فيه مصدر رحب يعترف فيه بالفضل لمن أوضحوا له ذلك وعند إعادة طبع مقاله فضل أن يترك الخطأ كما هو دون تصحيح حتى يترك للآخرين الفرصة فى الاستمتاع بتقديم أشكال بيانية أفضل مما قدمه فى مقاله عام ١٩٣١ .

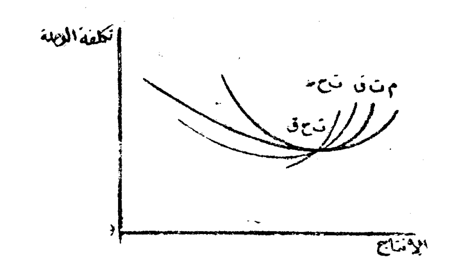
وطبيعى أن المنشأة لا تقوم ، فى الواقع ، ببناء عشرات المصانع حتى تسبين ما يحدث للتكاليف . ولكنه يتعين على المنشأة أن تقرر حجم الوحدة الانتاجية المطلوب . وحتى تصل إلى هذا القرار فانها تقوم باستقصاء الحدود الدنيا للتكاليف وقد يتيسر لها ذلك من واقع التجربة والخبرة أو نتيجة للدراسات التى يقوم بها الفنيون والمهندسون ، ولهذا السبب نجد أن المنحنى م ت ط غالبا ما يشار إليه كمنحنى التخطيط للمنشأة .

والواضح أن منحنى التكاليف فى الأجل القصير لابد وأن تأخذ الشكل لها ، فوجود المدخلات الثابتة هو الذى يؤدى إلى ذلك . ولكن ما هو الشكل الذى يأخذه منحنى التكاليف فى الأجل الطويل ؟ وعلى الجميع يتفق على أن المنحنى فى الأجل الطويل يبدأ أولا فى الانخفاض نتيجة لوفورات الحجم ، ولكن هل يصل إلى نقطة دنيا محددة للتكاليف ويبدأ بعد ذلك فى الارتفاع ؟

والحقيقة أن الشكل التقليدى لمنحنى التكاليف فى الأجل الطويل يظهر على النحو المبين بالشكل (٨ – ٩) ، ويظهر منحنى التكلفة الجديد فى الأجل الطويل كذلك فى هذا الشكل وهو يبين التغيير الذى يطرأ على التكاليف الكلية عندما

يزيد الانتاج نتيجة التوسع فى بناء وحدات إنتاجية أكبر ، ولنفرض أن المنشأة تنتج عند أدنى نقطة على المنحنى م ت ط .

وعلى ضوء المعلومات التى تظهر فى الشكل (٨ ـ ٩) والتى تبين منحنيات التكاليف المتوسطة والحدية فى الأجل القصير عند نفس مستوى الانتاج ، نجد أنه إذا توسعت المنشأة فى الانتاج باستخدام نفس المصنع فانها ستتحرك على طول المنحنى ت ح ق ، ولكن إذا توسعت المنشأة فى الانتاج عن طريق بناء وحدات إنتاجية أكبر فانها ستتحرك على طول المنحنى ت ح ط .



شكل (٨ ـ ٩) منحنيات التكاليف التقليدية

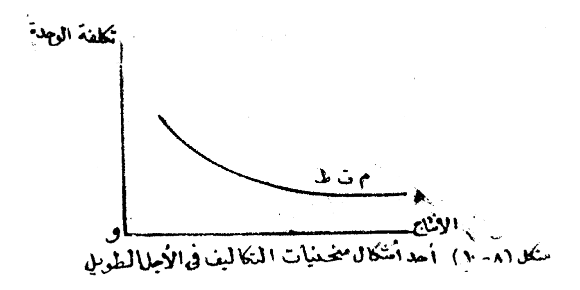
ولقد سبق أن ناقشنا مرحلة تناقص الغلة فى الفصل الخامس وبينا أنه بالرغم من وجود إتفاق حول إتجاه العائد إلى الإنخفاض مع زيادة الحجم إلا أنه لايوجد إتفاق حول الأسباب التى تدعو إلى ذلك . وتناقص الغلة وتزايد المنحنى م ت ط هما وجهين لعملة واحدة .

ومن المحتمل أن يكون الشكل الغالب على المنحنى م ت ط مشابها للصورة

الموضحة بالشكل (٨ - ١٠) . وتؤيد كثير من الدراسات التطبيقية التي أجريت بعد الحرب العالمية . ولعلنا نلاحظ أن المنحنى في هذا الشكل يأخذ وضعاً مسطحاً تماماً لمدى معين ، وعلى طول هذا المدى يكون للأحجام المختلفة من الوحدات الإنتاجية نفس الحدود الدنيا من التكاليف .

ولعلنا نلاحظ أن هناك العديد من الصناعات مختلفة الأحجام والتي تنتج بنفس التكاليف تقريبا ، ويختلف طول الجزء المتناقص من المنحنى من صناعة إلى صناعة أخرى .

وباختصار فان منحنى التكاليف في الأجل الطويل يميل أن يكون على شكل حرف L أكثر منه على صورة حرف U .



شكل (٨ - ١٠) أحد أشكال منحنيات التكاليف في الأجل الطويل

تطبيقـات :

إن القصد من تقديم بعض التطبيقات حول تحليل العلاقة بين التكلفة والإنتاج هو توضيح الفكرة الأساسية للتحليل ، فالاعتقاد السائد بين الناس أن زيادة الإنتاج يصاحبها إنخفاض في التكاليف ، وهذا يرتبط بمبدأ توزيع أعباء التكاليف الثابتة على عدد أكبر من الوحدات المنتجة ومن ثم تنخفض تكلفة الوحدة .

والمبدأ سليم فى حد ذاته — فى الأجل القصير ولمدى معين من الانتاج ولكنه غير سليم بالنسبة لمستويات الانتاج التى تتعدى حدود إنتاج الطاقة بالاضافة إلى أن سرعة إنخفاض تكلفة الوحدة تبعا لزيادة حجم الانتاج تعتمد على حجم التكاليف الثابتة فكلما كانت هذه التكاليف الثابتة تمثل جزءا صغيرا من التكاليف الكلية وكانت التكاليف الحدية والمتغيرة ثابتة ، كلما كان الانخفاض فى تكلفة الوحدة نتيجة لزيادة كمية الانتاج صغيرا وفى الطرف الآخر كلما كانت التكاليف الثابتة تشكل نسبة كبيرة من التكاليف الكلية وكانت التكاليف المتغيرة والحدية متناقصة لمدى كبير من الانتاج، فان الانخفاض فى تكلفة الوحدة يكون سريعاً فى إستجابته لزيادة الانتاج .

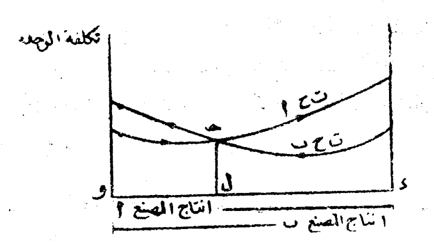
كذلك لا ينبغى الخلط بين علاقة التكلفة بالانتاج فى الأجل الطويل وبين هذه العلاقة فى الأجل القصير .

توزيع الانتاج بين مصنعين :

ولنفرض أن المنشأة مصنعين . فكيف يمكنها توزيع الانتاج بين المصنعين بحيث تصل بالتكلفة إلى أدنى حد ممكن ؟ وتجدر الاشارة هنا إلا أن التكلفة المقصود تدنيتها هى التكاليف المتغيرة الكلية . فليس هناك معنى للحديث عن تدنية التكاليف الثابتة فى مشكلة كهذه ، لأنها مشكلة قصيرة الأجل . والتكاليف الثابتة تظل ثابتة فى الأجل القصير ولا سبيل إلى خفضها .

وحتى يمكن المنشأة أن تصل بتكاليفها المتغيرة إلى الحد الأدنى ، فانها تقوم بتوزيع الانتاج بين المصنعين بحيث تتساوى التكاليف الحدية فى كلا المصنعين ، ويصور الشكل (٨ — ١١) هذه الحالة ، ويمثل البعد و ى فى الشكل الانتاج الكلى المطلوب توزيعه ، ولقد حدد هذا المستوى من الانتاج على أساس أن هذه الكمية هى التى يرغب المستهلك فى الحصول عليها بالسعر الذى تحدده المنشأة ، ويمكن

إنتاج هذه الكمية فى أحد المصانع ا أو ب ، ويصور المنحى ت ح ا التكلفة الحدية المصنع ا والتى تمتد من اليسار إلى اليمين . بينما يصور المنحنى ت ح ب التكلفة الحدية للمصنع ب والذى يتجه من اليمين إلى اليسار ، ويتقاطع المنحنيين عند النقطة حـ ، وعندما ينتج المصنع ا الكمية و ل .



شكل (٨ - ١١) تخصيص الإنتاج فى مصنعين

والمصنع ب الكمية ل د تصل التكلفة المتغيرة الكلية إلى أدنى حد ، فاذا انتج المصنع ا كمية أكبر والمصنع ب كمية أقل فان التكاليف ترتفع فى هذه الحالة لأن المنحنى ت ح ا سيقع أعلى المنحنى ت ح ب على يمين النقطة حـ كذلك فان التكلفة تكون أكبر إذا أنتج المصنع ب كمية أكبر والمصنع ا كمية أقل ، ويمكن التأكد من أن النقطة حـ تعبر عن أدنى تكلفة بالنظر إلى المنطقة الواقعة أسفل منحنى التكلفة الحدية والتى تمثل التكاليف المتغيرة الكلية .

ونظرة أخرى إلى الشكل (٨ - ١١) تبين أن هذه المنطقة الإنتاج المشترك تصل إلى أدناها عند النقطة حـ والتى تحدد توزيع الانتاج من المصنعين بالقدر الذى يصل بالتكلفة إلى أدنى حد ممكن .

ويلاحظ أن الشكل (٨ - ١١) قد صمم بطريقة تظهر التكاليف الحدية المصنع ب أقل عند أى مستوى من مستويات الانتاج ومع ذلك نجد أنه من

الأفضل أن يتم تخصيص بعض الانتاج للمصنع أ . كذلك يلاحظ أن كلا المنحنيين يتلاقيان عند النقطة ج ، وهذا شرط ضروري للحل .

التكلفة الحدية والتكلفة الإضافية Marginal and Incoemental Cost

غالبا ماتجذب التكلفة الحدية إنتباه صانع القرار الرشيد ولكن لنفرض أن صانع القرار لايستطيع ، ولو في مخيلته : أن يغير حجم أنتاجه بوحده واحده ونظراً للعديد من الاسباب العملية يتم زيادة الإنتاج بدفعات أو أحجام معينة . لذلك سيلجأ في هذه الحالة إلى استخدام التكلفة الإضافية والتي تمثل تكاليف الدفعة المضافة إلى حجم الإنتاج وهي في حد ذاتها تعتبر الاعتبارات عملية في التطبيق أقرب تقريب التكلفة الحدية . لذلك فان قرار الأعمال الرشيد يمكن أتخاذه على أساس التكاليف الإضافية والتي تقارن في هذه الحالة بالايرادات الإضافية ، أي الايراد التي تتحقق من بيع الدفعات المضافة من الإنتاج .

كذلك يحدد شكل منحنى التكاليف في الأجل طويل حجم المنشأه ومن ثم درجة الاحتكار في السوق . . ويعتمد عليه في الحياه العملية عند إصدار التراخيص للمشروعات المختلفة لمزاولة العمل وتحديد أوجه الاشراف عليها .

الفصل التاسع

البرمجة الخطية

لقد قام الانسان ، منذ الماضى السحيق ، يصنع قراراته حول الكيفية التى ينتج بها سلعة . . وعلى مر التاريخ ، أتخذت القرارات بنفس الطريقه سنه بعد الأخرى متجاوبة فى ذلك بل ومطابقة للنماذج التى أملتها ظروف الحياة من عادات وتقاليد وثقافة . ولقد بدأت القرارات الخاصة بالإنتاج فى الدول الرأسمالية تأخذ طابعا يتزايد رشدا وعقلانيه خلال القرنين الماضيين وأصبح أكثر إدراكا ومتممدا اختبارات مدروسة لأفضل الوسائل التى تحقق أهداف محددة واضحة .

ولكننا ، استعرضنا فى الفصول الثلاثة السابقة نظرية المنشأه فى صوره تبين القرارات التى يتخذها رجال الأعمال حول استخدام كل متغير على حده أو فى أغلب الأحيان متغيرن فى كل مرة . ولنفرض ، كما هو حقيقى فى غالب الأحيان ، أنه يتعين على رجل الأعمال أن يأخذ عشرات أو مئات للتغيرات فى الحسبان دفعة واحده . فما هو الحال إذاً ؟ الحقيقه أن النظريه الاقتصاديه لازالت قادره على الإجابة على هذا السؤال . مشيرة إلى القرار الخاص بتدنيه التكلفة أو تعظيم الربح . واجابات النظريه هنا لاتكون فى صوره بيانيه مبسطه على النحو الذى عرضناه فى الثلاثة فصول السابقة . ولكنها إجابات تصاغ فى لغة رياضية متقدمة . وعامه فان الصورة الرياضية تأخذ صورة لانستطيع معها الإجابات أن توجه إلى إستخدام عملى معين بذاته .

ولقد عالج الفريد مارشال موضوع القرارات الإنتاجية باستخدام أسلوبه

الذى قدمه تحت اسم « مبدأ الإحلال » إذ كان ينظر إلى رجل الأعمال ؛ على أنه يقوم باستمرار بدراسة دالة إنتاجه وإسعار مدخلاته . وكلما تغيرت يستمر رجل الأعمال فى إحلال أحد المدخلات محل الآخر ومن ثم يحتفظ بتكلفته إلى أقل مستوى ممكن . وفى رأى مارشال ، أن رجل الأعمال لايعتمد كثيراً على حسابات منهجية بقدر مايستخدم موهبته التى اكتسبها من خبرته ومرانه .

والطريقة التى تعتمد على حسابات منهجية ليست متوافرة : فمثل هذه الطريقة تعتبر أمتدادا وتوسعا وحاله خاصة لنظرية الثمن . ولـكننا ؛ فى نفس الوقت نستطيع تطبيق الطريقة التى تسمى « البرمجة الخطية » فى حل العديد من مشاكل الأعمال المتنوعة والمتسعة المجال .

البرمجة الخطية

البرمجة الخطية [١] اسلوب يستخدم مستوى رفيع من الرياضيات لحل مشاكل من أنواع معينة ؛ وخاصة تلك المشاكل المرتبطة بالانتاج . والخطية تعنى هنا أن العلاقات المستخدمة فى التحليل هى نفس العلاقات من النوع الذى تمثله خطوط مستقيمة . والبرمجة تعنى ببساطه التخطيط المنتظم أو صنع القرار وتسمى كذلك « البرمجة الرياضية » و « تحليل الأنشطة » ولقد قدم هذا الأسلوب فى عام ١٩٤٧ بواسطة عالم الرياضيات جورج دانتزج Dantzig فى بغرض جدوله أنشطه المشتريات والأمدادات للقوات الجوية الأمريكية . [٢]

---

(١) وهناك تعريف أساسى ومنهجى : يعرف البرمجة الخطية على أنها تعظيم (أو تدنية) لدالة خطية لمتغيرات عرضه لقيود فى صورة متباينة خطية .

(٢) الحقيقة أن عالم الرياضات الروسى كانتروفيتش Kantorvich هو أول من وصنع صياغة البرمجة الخطية . ولكن وانتزج اخترع أسلوب أفضل فى الحساب .

ومنذ عام ١٩٤٧ حدث تقدم كبير فى البرمجة الخطية سواءا فى النظرية أو التطبيق على المشاكل العملية فى الصناعة . ولقد ساهم أكتشاف الحاسبات الالكترونيه فى نمو البرمجة الخطية ، التى تحتاج إعادة ، إلى حسابات عددية ضخمة .

ولقد أصبحت البرمجة الخطية تمثل حالات خاصة فى دراسة النظرية الاقتصادية للمنشأة . ولعلنا تتذكر أن ماعرضناه فى الفصول السابقة من الخامس إلى الثامن إن هو إلا مايعرف الآن بالنظريه التقليدية كان فى صورة أكثر عمومية ، غطت الأجل القصير والأجل الطويل سواء فى صورة علاقات خطية أو غير خطية كذلك عرضت علاقات التكاليف بالانتاج لأى مدى من مستويات الانتاج .

والحقيقة أن بعض الافكار الاساسية للبرمجة الخطية رياضى المنهج ، لذلك لانستطيع أن نفرض وصفا كاملا للبرمجة الخطية فى هذا الفصل ولكننا سنتعرض لبعض اوجة التحليل الرياضى له فى الفصل التالى . . كذلك فإن المكون الاقتصادى لما يمكن بحثه جنبا إلى جنب مع بعض التعديلات التى تحدثها فى نظرية المنشأة .

بعض الافكار الاساسية للبرمجة الخطية

بصرف النظر عن تلك الافكار ذات الطابع الرياضى البحت نجد أن الأفكار الرئيسية للبرمجة الخطية بسيطة . ولقد ركزت النظرية وتطبيقاتها على القرارات القصيرة الأجل فيا يختص بإنتاج المنشأة عند أسعار معينة للمدخلات والمنتجات .

التعظيم والاختيار

إن السمة البارزة للبرمجة الخطية أنها تعطى حلولا عددية حقيقية للمشكلة التى تسعى إلى تعظيم الاختيارات عندما يحاط الحل بمجموعة من القيود.

الخطية Linearity

الخطية تجمع بين الافتراض المبسط والتعبير المفيد حول علاقات المدخلات بالمخرجات. فافتراض الخطية يبسط من الرياضيات المعقدة للبرمجة. والمعنى الاقتصادى للخطية هو ثبات الغلة (أى أن الناتج الحدى يساوى الناتج المتوسط) وبأسعار معينة للمدخلات والمنتجات (والتى يمكن عرضها فى صورة خط أفقى على شكل بيانى يربط بين السعر والكمية) وإن كان من غير المنطقى افتراض أن مجتمع من المجتمعات يتحول فجأة إلى اقتصاد خطى.. إلا أن فرض ثبات الغلة على طول مدى من مستويات الإنتاج أمر شائع. ويعنى ذلك بصريح العبارة ، أن تكاليف الوحدة ثابتة على طول هذا المدى وأن متوسط التكاليف المتغيرة يساوى التكاليف الحدية. وبناء على ذلك فان أسلوب البرمجة الخطية يمكن تطبيقه عندما تأخذ منحنيات التكاليف الصورة الموضحة بالشكل (٨ — ٥) فى ص٢٤٤. وحينئذ ، حتى لو افترضنا أن عوائد وتكاليف المنشأة ليست خطية على وجه التحديد ، فربما تكون قريبة فيها بحيث يصبح افتراض الخطية مرغوب فيه لجميع الأغراض العملية. وتجدر الاشارة هنا إلى أننا نستخدم فرض الخطية . هنا من أجل التبسيط وتقجه لآثار البرمجة الخطية نفسها.

فليس كل البرمجة الرياضية خطية بالضرورة. إذ هناك تطبيقات على استخدام اسلوب البرمجة غير الخطية فى النظرية التقليدية عندما تتعامل مع

منحنيات بدلا من خطوط مستقيمة لتصوير العلاقات . ولكنه استخدام البرامج غير الخطية يثير كثيرا من الصعوبات والتعقيدات الرياضية والتى أدت إلى عدم تناولها بالتطبيق . كذلك هناك اسلوب آخر يعرف ببرمجة الأعداد الصحيحة Integer Programming وفى هذه الطريقة تصاغ المشكلة بطريقة تجعلنا نحصل على النتائج فى صورة أعداد صحيحة . فلا يسمح بالكسور .. مثال حلول مشاكل النقل ، حيث تقول ٨ طائرات نقل بدل من ½ ٧ أو ٨ .

العمليات Processes

العملية هى فكرة أساسية أخرى البرمجة الخطية . وكذلك تسمى العملية بالنشاط وهى الطريقة التى تؤدى بها الاشياء والعملية هى مزيج من مدخلات معينة لانتاج مخرج معين . فسائق السيارة النقل ، والسيارة التى يعمل عليها كلاهما عملية — إذ يستطيعان نقل العديد من الأطنان لعدة أميال فى الأسبوع ويقصد بمستوى العملية عدد السيارات المستخدمة والتى يعمل بكل منها سائق واحد . ويقصد بفرض الخطية أن سيارتين تنقل ضعف الحمولة التى تستطيع سيارة واحدة نقلها ، و ٤ سيارات ينقلون ضعف السيارتين وهكذا ..

وفكرة العملية فنية بالضرورة . والعملية هى مركب (كبير كان أو صغير) من الرجال والمعدات . وتستخدم كل عملية عوامل إنتاج (العمل ورأس المال) بنسب ثابتة . ولهذا لا توجد فرصة للاحلال داخل العملية . وعلى العكس من ذلك ، تفترض النظرية التقليدية سهولة الاحلال بين المدخلات — على امتداد منحنى سواء ممهد للانتاج .

والشكل منشأة عدة عمليات ، يمكن إجراء كل منها عند مستويات متعددة لانتاج سلعها . ويمكن تحل أحد العمليات محل العملية الأخرى . وعندما

تستخدم عمليتين أو أكثر معا فى وقت واحد فانها لاتتداخل مع بعضها البعض ولاتزيد أو تعزز أحدهما الأخرى . وهذا الافتراض الأخير هو فرض آخر للتبسيط . ومن الأمثلة النموذجية لمشاكل البرمجة الخطية ذلك الذى يهدف إلى البحث عن المزيج الأمثل من العمليات أى المزيج أو الخليط الذى يدنى التكلفة فى ضوء القيود المحيطة بالعمليه . وسوف نعطى مثـالا لذلك فيما بعـد .

دالة الهدف The Objectuie Function

لقد حملت البرمجة الخطية صياغة لغتها . ولقد ظهرت الافـكار الاقتصادية البسيطة فى عبارات جديدة . وأحسن الأمثلة على ذلك هو (دالة الهدف) وتسمى دالة الهدف كذلك بدالة المعيار Criterion Functian وهى تضع محددات الكمية التى يراد تعظيمها أو يراد تدنيتها . وتعتبر الأرباح أو الايرادات دالة هدف عندما يراد تعظيمها . كذلك فان التكاليف دالة هدف فى المشاكل التى يراد فيها الوصول بهذه التكاليف إلى أدنى حد ممكن وتدنيه التكاليف هى نظير تعظيم الأرباح والعكس بالعكس . واهمية النظير أو الثنائى كامنه فى أنه يمكن تحويل حل مشكلة أحد المنشآت فى تدنية التكاليف رياضيا إلى حل لتعظيم الأرباح . دون الحاجة إلى البدء فى عملية التحليل من البداية . والمهم هو أعطاء تفكير عميق وعمل جاد فى صياغة المشكلة فى صورة برمجة خطية .

القيود Constraint

القيود هى الأشياء التى لايستطيع الفرد أداءها ولكن يتعين عليه عملها .

فيزانية المستهلك تمثل قيـداً من القيود . والمنشأة التى تحاول تعظيم إيرادها ، تواجه قيوداً ممثلة فى عـدد محدود من الماكينات ، وليكن ١٠ آلات مثلا ، ومساحة محدودة من الأمتار . . . . إلخ ، كذلك فإن الآله ا تحتاج إلى عامل لتشغيلها بينما تحتاج الآله ب إلى عاملين على الأقل . . . وهكذا . وتعرف القيود كذلك كمتباينات . أى أننا نقول مثلا ١٠ آلات أو أقل (≥ ١٠) تتوافر للمنشأة و رجلين أو أكثر (≤ ٢) يحتاجهم للعمل على الآلة ب ، وهكذا . . .

الحلول ذات الجدوى Feasible Solutions

يمكن البحث عن الحلول ذات الجدوى بعـد تكوين القيود . والحلول ذات الجدوى للمستهلك هى كل المجموعات السلعية التى تستطيع شرائها فى حدود دخله وعلى ضوء أسعار هـذه السلع . وفى الحالة التى يكون اختيار المستهلك مقصوراً على سلعتين ، تكون الحلول ذات الجدوى هى جميع المجموعات من خليط السلعتين التى تقع على خط الميزانية وعلى يساره . كذلك فإن أحد الحلول ذات الجدوى للمنشأة تتكون من جميع المجموعات المركبة من الدخلين والتى تقع على خط سواء التـكلفة وعلى يمينه .

الحلول المثلى : Optimum Solutions

الحل الأمثل هو أفضل الحلول ذات الجدوى . فى بعض الأحيان يحصل من نتائج البرمجة الخطية على عـدد من الحلول ذات جدوى وكلها حلول جيدة وكلها أحسن من غيرها . إذا لا نفضل أحدها على الآخر . ومن ثم لا يوجـد حل أمثل . وسوف نعطى فيما بعد مثال لذلك .

وطريقة الحـل التى تعرف بالسمبلكس Simplex ليست طريقة بسيطة كما تعنى كلة Simple باللغة الإنجليزية ولكنها اسم لطريقة تستخدم إعادة

إجراءات رياضية وحسابية لإيجاد الحل الأمثل .

وطريقة السمبلكس فى جوهرها ، تستخدم مجموعة من الحسابات الجدية المتتابعة ، وتتكون من اختبارات متتالية لحلول ذات جدوى ، وتجذب بالتتابع الحلول السيئة شيئاً فشيئاً حتى يظهر فى النهاية الحل الأمثل .

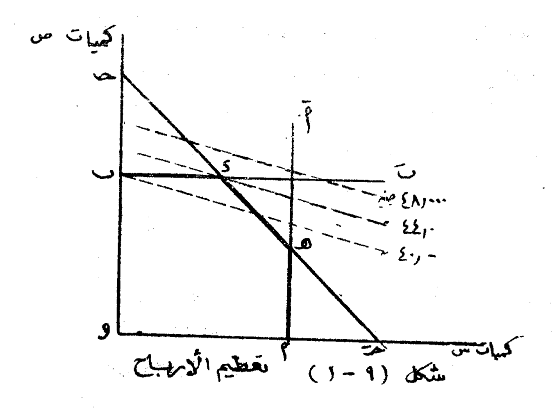
وبالإشارة إلى الأساليب البيانية التى استخدمت فى الفصول السابقة سوف نعرض فيما يلى ثلاثة نماذج من تحليل البرمجة الخطية . يبين أحدهما كيف تعظم المنشأة أرباحها ويبين الآخرين كيف تدنى المنشأة تكاليفها .

تعظيم الأرباح :

إن أيسر مشاكل البرمجة الخطية سهولة على الفهم هى تلك المشاكل الخاصة بتعظيم الأرباح المحصلة من إنتاج سلعتين يخضع إنتاجها لثلاثة قيود . وتعرف بمشكلة « خليط المنتج » Produes mix . ويمكن إنتاج السلعتين بنسب مختلفة أو عدة مجموعات من خليط السلعتين وتنحصر المشكلة هنا فى إيجاد الخليط الذى يحقق أقصى ربح .

ولقد سبق أن رأينا فى التحليل الحدى للنظرية التقليدية أن المنشأة التى تنتج سلعتين تستخدم منحنى إمكانيات ممهد ومستمر ، ويفسر ذلك أن المنشأة تستطيع أن تغير نسب السلعتين بمقادير متناهية الصغر(*) ولكننا الآن بصدد منشأة إمكانياتها الإنتاجية لها طاقة محددة .

(*) أنظر ص ٢٤٥



شكل (٩ - ١) تعظيم الأرباح

ويبين الشكل (٩ — ١) حالة منشأة لها مصنع ينتج سلعتين س ، ص . ويتعرض الإنتاج لثلاثة قيود ا ، ب ، حـ .

ويتحدد حجم الإنتاج الشهرى للسلعة س بطاقة الآله ا . إذ لا يمكن أن يزيد إنتاج السلعة س عن الحجم و ا . ويتعين الإنتاج الشهرى للسلعة ص بطاقة آلة أخرى ب . ويستحيل إنتاج أكثر من و ب وحده من السلعة ص . ويوضح المستطيل المكون أضلاعه من الإحداثيين والخطين ا ا ، ب ب

آثار هذين القيدين مجتمعه . وهناك قيد ثالث حـ يحدد محل الطلاء . حكلا السلعتين لا بد من طلائهما :

ويحدد الخط حـ حـَ الطاقة الشهرية لمحل الطلاء . ويشير ميل الخط أنه كلما زاد عدد الوحدات المطلوب طلائها من س كلما نقص عدد الوحدات التى يمكن طلائها من ص .

لذلك فإن المنطقة المظللة بالشكل (٩ — ١) تمثل إنتاج الجلوى .

وتكون الخطوط الثلاثة ب ء ، ءهـ ، هـ ا تصوير البرمجة الخطية لمنحنى إمكانيات الإنتاج . ومن ثم فإن كل خليط من السلعتين س ، ص يقع على أحد هـذه الخطوط المستقيمة ذى جدوى بمعنى أنه يمكن إنتاجه . كذلك فإن المجموعات من خليط السلعتين الواقعة داخل المنطقة المظلله مجموعة ذات جدوى . ولكنه مستحيل إنتاج س ، ص فى مجموعات ممثله فى نقاط تقع خارج المنطقة المظللة .

والآن نبحث عن الأرباح التى تحققها هذه المنشأة . وهى تمثل الفرق بين الإيراد المحقق من بيع السلعتين وتكاليف انتاجها . فالمنشأة تحقق إيرادها من بيع السلعتين س ، ص بأسعار محددة وتستقطع من هذه الأسعار تكاليف المواد الخام والعمل والوقود والطاقه ، وغيرها المحملة على الوحدة من س ، ص ويمثل الفرق بين سعر الوحدة وتكلفة الوحدة ربح الوحدة من س ، ص .

وهذا التعريف للارباح هو نفسه الفرق بين السعر مطروحاً منه متوسط التكاليف المتغيرة . وهذا تعريف شائع لربح الوحدة فى هذا المجال . ولا ضرر منه طالما أنه لا يتعارض مع تعاريف أخرى . ولكن دعنا الآن نفترض أن ربح الوحدة من س هو ١٠ جنيهات وللوحدة من ص ٤٠ جنيهاً .

ويتعين علينا بعد ذلك تحديد خطوط سواء الأرباح . وهى ترسم بنفس الطريقة التى رسمنا بها خطوط سواء التكلفة وخطوط سواء الإيراد . ويظهر بالشكل (٩ — ١) ثلاثة خطوط لسواء الأرباح . الخط ٤٠٠٠٠ جنيه يتلامس مع الإحداثى الرأسي عند النقطة ب . ولما كان ربح الوحدة من ص هو ٤٠ جنيه ، فإن المسافة و ب لا بد وأن تمثل ١٠٠٠ وحدة من السلعة ص . ولما كانت نقطة تلاقى الخط ٤٠٠٠٠ مع الإحداثى الأفقى غير ظاهرة بالشكل (٩ — ١) ولكننا نستطيع تحديدها بسهوله . وهى تقع عند ٤٠٠٠ وحدة من س لأن ربح الوحدة من س هو ١٠ جنيهات . وميل خط سواء الربح

هو نسبة ربح س إلى ربح ص وهى تمثل بالنسبة لهذا الخط ½ . وكلما كان الخط أبعد تجاه الشمال الشرقى كلما كان حجم الأرباح أكبر .

وتمثل النقطة ى بالشكل (٩ — ١) الحل الأمثل . حيث تصل الأرباح إلى أقصى حد ممكن عند المستوى ٤٤٠٠٠ جنيه فى الشهر . وأى خليط آخر ممكن إنتاجه (ذى جدوى) من السلعتين سوف يحقق أرباحاً أقل . والحل عند النقطة ى هو « حل الركن » أى أن النقطة ى والتى تمثل الحل الأمثل تقع عند ركن ما . . وفى هذه الحالة يكون هناك حل أمثل وحيد Unique وحلول مشاكل البرمجة الخطية تقع دائما عند الأركان . وتظهر بالشكل (٩ — ١) ركنين فقط يمكن عندهما إنتاج السلعتين س ، ص ، لأن لدينا ثلاثة قيود فقط . وكلما زاد عدد القيود كلما زادت الأركان . وعند استخدام البرمجة الخطية فى الواقع تستخدم الحاسبات الالكترونية لإيجاد المناظر الجبرى لهذه الأركان ومن ثم البحث عن الركن الذى يمثل الحل الأمثل .

ونظرة أخرى إلى الشكل (٩ — ١) تبين أن التغيرات الصغيرة فى ميل خط سواء الربح لن تغير من موضع الحل الأمثل عند النقطة ى فقد يتغير ميل الخط نتيجة لتغيرات نظر أعلى أسعار السلعتين س ، ص ، أو فى تكاليفهما أو فى كليهما معاً . إذ لا بد أن يكون هناك تغير ملموس فى الميل حتى يتحرك الحل من الركن ى إلى الركن هـ . وعلى العكس من ذلك نجد أن المنشأة فى ظل التحليل الحدى التقليدى تغير من عملياتها نتيجة لأى تغير يطرأ على التكاليف أو الأسعار ، وذلك لأن خطوط سواء التكلفة وخطوط سواء الإيراد تمس منحنيات ممهدة .

ولنفرض بعد ذلك أن أرباح الوحدة من س ، ص تغيرت بشكل

أحدث انتقال لخط سواء الربح إلى أعلى بشكل موازى تماماً للخط ى بالشكل (٩ — ١) فما هو الحال إذاً ؟ إذا حدث ذلك فلن يوجد ركن يمكن الوصول إليه . والحقيقة أنه لا زالت هناك أرباح قصوى يمكن تحقيقها من أى مزيج من السلعتين يقع على أى نقطة بين ى ، هـ .

أسعار الظل : Shadow Prices

إن مشكلة البرمجة الخطية التى عرضناها سابقاً هى من النوع الذى يهدف إلى تعظيم الأرباح فى ظل قيود فرضتها حدود طاقات ثلاثة موارد .

ومثل هذه المشكلة يمكن إعادة صياغتها رياضياً لتتحول إلى مشكلة تدنية التكاليف . والمشكلة الأصلية لتعظيم تسمى « الأولية أو الأساسية » The Primal والمشكلة المرتبطة بها للتدنية تعرف « بالثنائى أو المثنى » The dual وحساب المثنى يعطى « أسعار الظل » للموارد المحدودة . كذلك فهناك اسم آخر لأسعار الظل يعرف « بالقيم الضمنية » .

وأسعار الظل هى القيم المحسوبة للزيادات فى الموارد المحدودة والتى تمثل عنق زجاجة فى الإنتاج .

ونظرة أخرى إلى النقطة ى فى الشكل (٩ — ١) تبين الآتى : أن المورد ا لم يستخدم بكامل طاقته . فالحل الأمثل عند ى يدعو إلى إنتاج ب ى وحده من س بينما نستطيع الحصول على عدد الوحدات و ا من س فى حالة استخدام طاقة المورد ا بكاملها . وعلى العكس نجد أن كلا الموردين ب ، حـ يستخدمان بكامل طاقتهم الإنتاجية .

لذلك فإن المورد ب والمورد حـ يمثلان عنق زجاجة . فإذا أمكن زيادة طاقة المورد ب ، أمكن إنتاج المزيد من السلعة ص وبيعها وتحقيق مزيد من الأرباح منها . وبالرغم من أن المورد ب عبارة عن آلة . . إلا أننا سنفترض هنا أنه يمكن إجراء تعديل ما عليها يزيد من طاقتها . ولنتصور أنه يمكن زيادة طاقة ب بنسبة ١ ٪ . فإن الأرباح الإضافية التى تترتب على هذه الزيادة تسمى بسعر ظل ب . كذلك فإن زيادة طاقة المورد حـ بنسبة ١ ٪ ستحقق مزيداً من الأرباح التى تعتبر أسعار ظل المورد حـ (محل الطلاء) .

ولكن ماهو الحال بالنسبة للمورد ا ؟ الحقيقة أن سعر الظل لهذا المورد يساوى الصفر . وكون سعر ظل ا يساوى صفر لا يعنى أن هذا المورد عديم الفائدة أو لا يساوى شيئاً . ولكن صفرية سعر الظل تعنى أن المزيد من ا ليس له قيمة فى هذه الظروف .

ولو فرضنا جدلا أن الحل الأمثل يتحقق عند الركن هـ فإن الأمور ستكون مختلفة تماماً . إذ يصبح الموردين ا ، حـ عنق زجاجة بينما ب لا تمثل عنق زجاجة . ومن ثم فإن سعر الظل للمورد ب سيكون صفر فى هذه الحالة فعندما يكون الحل عند الركن هـ ستكون أرباح الوحدة المحققة من بيع المنتجات س ، ص مختلفة تمام الاختلاف عما كانت عليه عند الحل ى . ولهذا فإن أسعار الظل لموارد عنق الزجاجة تعتمد على الأرباح المحققة من السلع التى تنتجها وعلى إنتاجية هذه الموارد .

وأسعار الظل ليست أسعار تدفع أو تحصل فى الحقيقة . ولكنها تمثل القيم الضمنية المزيادة فى الموارد المختنقة . وأسعار ظل الموارد ب ، حـ تبين القيم الشهرية (على أساس أن المثال يتخذ قيم شهرية) . للزيادات الصغيرة فى الموارد .

وتستطيع إدارة المنشأة مقارنة أسعار الظل بتكاليف تعديل أو تكاليف التوسع فى طاقات الموردين. فإذا أظهرت النتيجة أن التكاليف الشهرية أقل من اسعار الظل، وكانت التوقعات عن المستقبل تدعو إلى التفاؤل، فإن التوسع يكون مربحاً .

تدنية التكاليف :

طبقاً لما ورد فى النظرية التقليدية ، تدنى المنشأة تكاليف استخدام مدخلين لشراء هذين المدخلين بالنسب التى تجعل منحنيات سواء الانتاج تمس خطوط سواء التكلفة . والقيود الرئيسية فى أسلوب البرمجة الخطية لما آثار تعديل أشكال منحنيات السواء .

مثال عن مشكلة غذائية :

أن مشكله الغذاء من المشاكل الأولى التى يمكن معالجتها باستخدام أساليب البرمجة الخطية . وتنحصر المشكلة هنا فى تدنية تكاليف وجبات غذائية يتوافر فيها الحد الأدنى للاحتياجات الغذائية ويمثل هذا الحد الأدنى قيود المشكله . والوجبة الغذائية التى نتعرض لها فى هذا المثال هى غذاء للحيوانات . وهناك العديد من الأغذية التى يمكن شرائها وكل منها له أسعار مختلفة للوحدة . وكل منها يحتوى على مقادير مختلفة من العناصر الغذائية لكل كيلو مثل الفيتامينات والمواد الغير عضوية (المعدنية) والبروتينات والسعرات . . إلخ .

والمطلوب البحث ان أرخص التركيبات التى تؤدى الغرض لهذا سنقدم مثال مبسط لفلاح يغذى ماشيته بنوعين مختلفين من الحبوب ولا بد أن

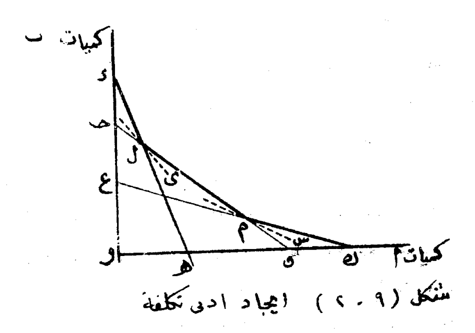
تعطى الوجبات الغذائية للماشية حد أدنى لكميات ثلاثة عناصر غذائية . هى تدنية تكاليف الوجبة الغذائية . وهناك متغيرين ، ولكل منها سعر . وتوجد ثلاثة قيود . فما هى الحلول المقبولة ؟ ذات الجدوى وما هو الحل الأمثل ؟

يبين الإحداثى الأفقى فى الشكل (٩ — ٢) عدد الكيلوات من الحبوب ا بينما يبين الإحداثى الرأسى كيلوات الحبوب ب . والحد الأدنى لاحتياج الماشية اليومى من العنصر ا تغطية الكمية و هـ من كيلوات الحبوب ا أو الكمية و ء كيلو من الحبوب ب . ولهذا يبين الخط ء هـ كيف تمزج الحبوب ا مع الحبوب ب لتعطى عنصر الغذاء ا . وتمثل النقط المختلفة على الخط ء هـ المجموعات المختلفة من كيلوات مزيج النوعين من الحبوب ، وكل مزيج منهما على نفس الدرجة فى الوفاء بالحد الأدنى من احتياجات العنصر ا . وانحدار ميل الخط و هـ بشدة يعنى أن الحبوب ا أكثر غنى فى هذا العنصر لأنه بالنسبة لأى خليط يبنيه الخط نحتاج إلى كمية أقل من ا ، كذلك فإن الخطوط حـ ـه ، ع ل تبين كيف يخلط النوعين من الحبوب لتعطى الحد الأدنى لاحتياجات الماشية اليومى من العناصر ٢ و ٣ .

وتمثل كل نقطة على أجزاء الخط الثقيل د ل م ك زوج مختلفة من كميات النوعين من الحبوب . ويغطى كل زوج فيها الاحتياجات من العناصر الثلاثة . وتغطى كل نقطة على هذا الخط الثقيل أحد هذه الاحتياجات ولكنها تزيد على الاحتياجين الآخرين . ويلاحظ كذلك أن الخط الثقيل يشبه سواء الإنتاج . ولكن هذا الخط لايبيور منحنى ممهد ولكنه يتكون من أجزاء خطيه .

والحلول المقبوله (ذات الجدوى) هى النقاط الواقعة على الخط الثقيل أو على يمينه . وتمثل المساحة المظللة منطقة الحلول المقبوله . فكل نقطه بها ذات

حيوى تبين أن الماشية تستطيع أن تحصل على الغذاء المطلوب . ولكن الماشية ليست حيوانات مدللة تقتنى من أجل الاستمتاع . ولكنها تربى من أجل بيعها بهدف تحقيق الربح . . ومن ثم فان الفلاح يريد الوصول إلى أدنى التكاليف .



شكل (٩ - ٢) ايجاد ادنى تكلفة

وحتى نحصل على الحل الأمثل ، لابد وان نأخذ الاسعار فى الأعتبار . وهى تدخل التحليل فى شكل خطوط سواء التكلفة ، حيث يحدد موضعها مستويات التكاليف الكلية وبين ميلها نسب أسعار الحبوب ا إلى الحبوب ت . وتظهر الخطوط المظللة ى ، س فى الشكل (٩ - ٢) كتصور ممكن لخطوط سواء التكلفة . وحتى يحقق الفلاح أدنى التكاليف فانه يود الوصول إلى أدنى خط سواء التكلفة يمكن الوصول إليه . ولنأخذ أولا خط سواء التكلفة ى

حيث بالشكل أ كثر خط سواء التكلفة انخفاضا حيث يلمس النقطة ل .
والنقطة ل هى المثلى عندما تكون نسبة الاسعار على النحو الذى يشير إليه الخط ى . وهنا نجد مرة أخرى أن كيلو الحبوب ب أقل سعرا ، والحل الأمثل يكون بتغذية عدد أكبر من كميات الحبوب ب عن كميات ا . ولنفرض أن الاسعار كانت على النحو المبين بالخط س . بأن الحل الأمثل يكون عند م فى هذه الحالة ، لأن ا ستكون الحبوب الأرخص .

ولنفرض أن نسب السعر كانت فى الحقيقة هى المبينة بالخط ى . فان ل كما سبق أن لاحظنا تمثل الحل الأمثل . ويلاحظ أن الحل ليس نقطة تماس ولكنه يمثل ركن . ويحتوى شكل (٩ – ٢) على ركنين فقط نتيجة لوجود ثلاثة قيود . فكلما زاد عدد القيود كلما زادت عدد الأركان . فاذا كانت هناك عدة . اعلاف بدلا من وجود نوعين من الحبوب فقط ، فاننا لانستطيع استخدام التحليل البيانى ونلجأ إلى استخدام التحليل الرياضى المتقدم .

وعوده مرة أخرى إلى الشكل (٩ – ٢) نجد أن الخط ى يمكن أن يدور قليلا بينما يظل ملاصقا الركن ل . أى أن الاسعار قد تتغير قليلا دون أن تؤثر على وضع ل الأمثل . وإذا فرضنا أنه حدث تغيرات الخط ى بحيث أصبح ميله مماثلا لميل الجزء من الخط ل م . فانه لن يكون هناك حل أمثل وحيد . فاما أن تكون ل أو م حل أمثل شأنها شأن أى نقطة تقع بين هاتين النقطتين .

وتستخدم أساليب البرمجة الخطية بواسطة الشركات الموردة لخليط أعلاف الماشية والدواجن وفى وجود العديد من العناصر والعديد من الاحتياجات المنفصلة التغذية ، فإن مشكلة إيجاد التكلفة الدنيا لمزيج الاعلاف يصبح فى

الحقيقة أمر صعب للغاية . وتلجأ شركات الاعلاف فى هذه الحالة إلى دور البحث والتى يتوافر لديها من الامكانات البشرية والرأسمالية (الرياضيين والحسابات الالكترونية) مايمكنها من إيجاد حلول البرمجة الخطية . فأسعار بعض العناصر فى خليط الاعلاف تتغير باستمرار وتقوم شركات الاعلاف بتبليغ هذه التغيرات فى الاسعار تلفونيا إلى شركات البحث . وفى فترة وجيزه من الزمن تحصل شركات الاعلاف على التعليمات التى تسعى إليها (هل تغير وكيف تغير خليط الاعلاف الذى تستخدمه حتى تجعل التكاليف عند أدنى حد بصفة دائمة . وهى نسبة تماما الحالة المبينة بالشكل (٩ – ٢) إذا تغيرت الاسعار من ى إلى س ؛ ويتحرك بناءاً على ذلك الركن الأمثل من ل إلى م .

وهناك نقطة أخرى تحتاج إلى تقديمها حول تغذية الماشية . ماهى عدد الكيلوات من العلف المتناسب الذى يجب الحصول عليه ؟ .

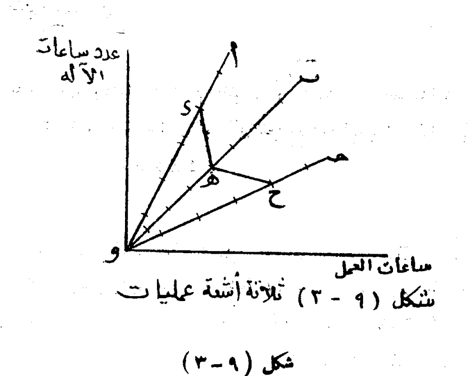
وللاجابة على هذا السؤال لانحتاج إلى أى برمجة خطية لأن هذه مشكلة تختص صراحة تناقص الغله . فكلما زاد عدد الكيلوات من خليط العلف فى اليوم ، كلما زاد وزن الماشية (أو زاد اللبن أو البيض أو أى شىء آخر) وتبين النتائج والمشاهدات العملية حول هذا النوع من علاقات المدخلات والمخرجات تناقص فى الناتج الحدى باستمرار . لذلك من الواضح أن الحل يعتمد على تكاليف (الدنيا) خليط العلف وسعر المنتج (المخرجات) وعلى سرعة تناقص الناتج الحدى . ولقد عرضنا هذه الحالة فى الفصل السادس والسابع .

اختياز العمليات :

ينظم العمل ورأسمال المنشأة فى عمليات أو أنشطة . وأحد المشاكل التى تواجهها المنشأة ، تتعلق بأفضل الوسائل لتجميع هذه العمليات وكيف توزع إنتاجها بينها . ولنأخذ مثالا لذلك :

ونبـدأ أولا بفكرة شعاع العملية Process ray . ويظهر فى الشكل (٩ ـ ٣) حيث يتكون من ثلاثة أشعة العمليات ولنأخذ أولا الخط و ب والذى يمثل شعاع عملية ، ويقيس الإحداثى الأفقى ساعات العمل والإحداثى الرأسى ساعات الآلة . ويقسم الخط و ب بوحدات من إنتاج المنشأة ، وتمثل العلامات المبينة على الخط بالتتابع ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ . . إلخ وحدة إنتاج فى الفترة أو ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، إلخ وحدة ، ولقـد رسم الخط و ب بزاوية ٤٥° ليمثل عملية تتساوى فيها عدد ساعات العمل مع عـدد ساعات الآلة من أى مستوى من المستويات ، لذلك فإن الخط و ب يمثل عملية يعمل فيها رجل واحد على آلة واحدة . وعلى العكس من ذلك نجد أن الخط و ا يمثل عملية يعمل فيها عاملا واحد على آلتين مقدر ساعات الآلة دائما ضعف ساعات العمل فى الخط و ا ، ويلاحظ أن التقسيمات الواقعة على الخط و ا ـ تختلف قليلا فالعملية ا أقدم أو أقل كفاءة ، والخط و حـ يمثل عملية مختلفة من حيث نسبة عدد العمالة بالنسبة للالات فكل آلة تحتاج فى هذه الحالة إلى عاملين يشتغلان عليها .

والخط المنكسر ى ف ح بالشكل (٩ ـ ٣) هو سواء الإنتاج أو على الأقل جزء منه ، وتمثل أى نقطة على الخط ى ف ح عملية أو مزيج من عمليتين تنتج نفس الكمية من المخرجات .



شكل (٩ - ٣) ثلاثة أشعة عمليات

شكل (٩ ـ ٣)

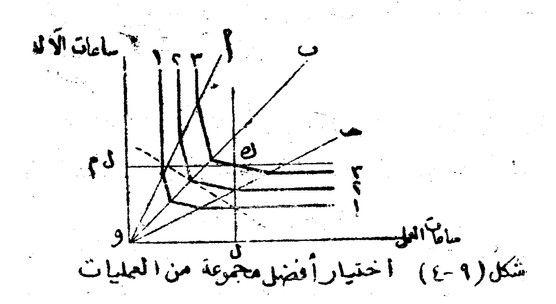
فانتاج ٤٠ (أو ٤٠٠ إلخ) وحدة يمكن أن يتم بالعملية ا (نقطة ى) أو بمزيج من العمليتين ب و حـ (فى نقطة تقع بين ف ، ح) أو بالعملية حـ .

وبعبارة أخرى ، فإن المنشأة تستخدم عند النقطة ى بالشكل (٩ ـ ٣) العملية ا دون سواها وتنتج ٤٠ وحدة فى هذه الحالة . فالمنشأة عند النقطة ب تقع على شعاع العملية ا . ولكن حينما تكون المنشأة عند نقطة على الخط ى هـ فإنها تستخدم عمليتين فى هذه الحالة ـ العملية ا والعملية ب ، وتكون المنشأة جزئياً عند شعاع العملية ا وجزئياً عند شعاع العملية ب . وقد تكون المنشأة فى منتصف المسافة و هـ وكذلك فى منتصف المسافة و ى . أو فى ربع أحد المسافتين وعند ثلاثة أرباع المسافه الأخرى . ويكون الإنتاج للمشترك لكلا العمليتين هو ٤٠ وحدة أيضاً ، أى أنه نفس حجم الإنتاج الذى تحصل عليه المنشأة فى حالة استخدام أحد العمليتين ا و ب . كذلك إذا كانت المنشأة عند نقطة بين هـ ، ح فإن المنشأة تكون جزئياً عند شعاع العملية ا

وجزئياً عنـد شعاع العملية حـ ، وهـنا نجد أيضاً أن الإنتاج المشترك يبلغ ٤٠ وحدة .

كذلك أقيم الشكل (٩ – ٤) بنفس الطريقة ، ودعنا نتجاهل مؤقتاً وجود الخطوط ل م ، ك ل والمنطقة المظلله . وفى هذه الحالة نجد نفس الثلاثة عمليات مع ثلاثة سواء للانتاج ١ ، ٢ ، ٣ . ويمكن تصوير منحنيات سواء أخرى للانتاج ، وكل منها يبين عمليات ومجموعة مشتركة من العمليات التى تنتج نفس حجم الإنتاج ، ويعنى ابتعاد سواء الإنتاج تجاه الشمال الشرقى مقادير أكبر من حجم الإنتاج .

وليس هناك أى معنى أو مغزى للأجزاء الرأسية أو الأفقية من منحنيات سواء الإنتاج ، وهى تبين أوجه التشابه بين هـذه المنحنيات وبين تلك التى عرضناها فى الفصول ٦ و ٧



شكل (٩ - ٤) اختيار أفضل مجموعة من العمليات

كذلك تتضمن الشكل (٩ – ٤) خط سواء للتكافة وهو الخط المنقط .

ويلتقى الخط سواء التكلفة مع سواء الإنتاج ٢ عند ركن . فإذا تحرك الخط موازياً لنفسه فإنه يلتقى دائماً مع سواء الإنتاج عند ركن شعاع العملية ب . لذلك فإن العملية ب هى المثلى ، باعتبارها أرخص عملية تستخدم عندما تتحدد الأسعار بالنسبة للمدخلات على النحو الذى يعكسه ميل الخط المنقط . ويلاحظ أنه لا توجد فى هذه الحالة كذلك نقط تماس كما هو الحال فى النظرية التقليدية .

فالتكاليف الدنيا تقع عند ركن من الأركان . فإذا كان خط سواء التكلفة يكاد يكون مستوياً فإنه سوف يلتقى مع الركن على العملية حـ . وإذا كان قريباً من خط رأسى فإنه سيلتقى عند ركن على العملية ا . كذلك فإن خط سواء التكلفة بالشكل (٩ ـ ٤) قد يتخذ ميلا أمساوياً لميل أحد أجزاء الخط . وفى هذه الحالة لا يوجد أى حل أمثل .

وحتى هذه اللحظة وجدنا أن المنشأة سوف تستخدم العملية ب إذا كان الغرض هو الإنتاج عند أى مستوى يحقق أدنى تكلفة . ولكننا سننتقل الآن إلى الحالة التى يظهر امامنا قيدين .

والخطوط لم و لن التى تظهر بالشكل (٩ ـ ٤) تعبر عن الحقيقة فى أن المنشأة لا تستطيع أن تستخدم أكثر من و لن من ساعات العمل أو أكثر من و لم من ساعات الآلة ويرجع ذلك إلى أحد الأسباب والتكن القيود التى تفرضها مساحة الأرض . هذه الحدود هى التى تمثل قيود المشكلة . وتمثل المنطقة المظللة منطقة الحلول الممكنة (ذات الجدوى) . فإذا أرادت المنشأة إنتاج أكبر كمية تستطيع الحصول عليها فى ظل القيود المفروضة . فإن أقصى إنتاج يمكن الحصول عليه يظهر عند النقطة ل فى

ركن الشمال الشرقى لمستطيل الحلول الممكنة . وتقع النقطة ك على سواء الانتاج ٣ وتمثل مجموعة مشتركة من العمليات ب ، حـ . ونسبة أسعار المدخلات هى نفس النسبة التى استخدمناها من قبل ولكن الاسعار لاتلعب نفس الدور الذى لعبته من قبل عندما كانت دالة الهدف تتطلب تعظيم قيمة الانتاج وليس كمية الانتاج العينى فى ظل القيود المفروضة .

وفى ظل وجود قيدين تستخدم المنشأه عمليتين وتحديد أى من هاتين العمليتين تختار يعتمد على التعريف بماهية القيود : ونظره أخرى إلى الشكل (٩ – ٤) سوف تبين أنه إذا تحرك الخط الذى يمثل قيد ساعات العمل إلى اليسار بعد كاف ، فإن الحل يكون خليط من العمليات ا ، ب .

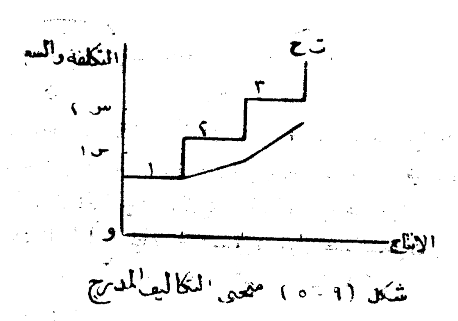
منحنيات التكاليف المدرجة

إن منحنيات تكاليف المنشأة التى وردت فى النظرية التقليدية منحنيات ممهدة ومستمرة على شكل حرف U . حتى فى الحالة التى تكون فيها منحنيات متوسط التكاليف المتغيرة والتكاليف الحدية مستويه على طول امتداد بعد معين ، فإن النظرية التقليدية تحتم ضرورة دوران هذه المنحنيات إلى أعلى بعد الوصول إلى حجم معين من الانتاج . (أنظر شكل ٨ – ١) فى الفصل السابق) .

وعندما يتحول . تحليل البرمجة الخطية إلى صوره النظرية التقليدية ينتج عن ذلك منحنى للتكاليف الحدية مدرج . وتتبع ذلك فكرة العملية . فأهمية المنحنى المدرج أن استجابة المنشأة للتغيرات فى سعر منتجاتها متقطعة .

ويوضح الشكل (٩ – ٥) صورة لمنحنى التكاليف المدرج . وفيها

يكون للمنشأة امرة أخرى ، ثلاثة عمليات تسمى فى هذه الحالة ١ ، ٢ ، ٣ . وللتبسيط سنفرض أن كل منها قادر على تحقيق نفس الحد الأقصى من الانتاج . ولكن تكاليف الانتاج فى العملية ١ أقل من تكاليف العملية ٢ وتكاليف العملية ٢ ، بدورها أقل من تكاليف ٣ . والمنحنى المدرج المنشأة هو منحنى التكاليف الحدية . وتعكس الأجزاء الأفقية منه الغرض الخطى والأجزاء الرأسية القيود . ويكون منحنى متوسط التكاليف المتغيرة هو متوسط لهذه التكاليف المتغيرة عند استخدام عمليتين أو أكثر .



شكل (٩ - ٥) منحنى التكاليف المدرج

فإذا كان السعر الذى تحصل عليه المنشأة من إنتاجها هو س ١ ، فانها سوف تستغل طبقا للعملية ١ فقط . أما إذا كان السعر هو س ٢ فان تشغيل المنشأة سيقتصر على العمليتين ١ ، ٣ . ولكن يلاحظ أن س ١ أو س ٢

يمكن أن تتحرك ارتفاعا أو انخفاضا فى حدود بعد معين على الأجزاء الرأسية من منحنى التكاليف دون أن يحدث أى تغير فى حجم إنتاج المنشأة فلذلك فإن المنشأة ليست مرنة (أو حساسة لهذه التغيرات فى سعر منتجاتها . وتتطابق هذه العبارة مع ما انتهينا إليه من نتائج فى بداية هذا الفصل وهو أن أى تغيرات فى أسعار المدخلات لاتغير من الوضع الأمثل .

لذلك فان المنشأة التى يكون منها عمليات محدده تستجيب بشكل منقطع مع التغيرات فى الأسعار .

تطبيقات

هناك تطبيقات عديدة للبرمجة الخطية فى المشاكل العملية للاعمال ولكن أساليب البرمجة الخطية التى تستخدم فى كل هذه المشاكل ليست على الصورة البسيطة التى شرحناه سابقا ، ولكن فى صورتها الرياضية الكاملة . وأحد فئات هذه المشاكل يعرف بمشاكل النقل Transportatian Problem ، وفيها نورد مثال لمنشأة تمتلك عدة مصانع تشحن منها الإنتاج إلى عدة منافذ التوزيع . ولهذه المصانع طاقات مختلفة ، وتختلف تكاليف شحن الطن من طريق إلى آخر (من المصنع الى مكان الوصول) . والأسواق التى تشحن اليها البضائع مختلفة الأحجام . وعلى ضوء هذه المتغيرات ، لايمكن الوصول إلى مكان محدد لتدنية تكاليف الشحن باستخدام الحسابات العادية اليومية . ولكن البرمجة الخطية تفيد فى حل مثل هذه المشاكل . والفئات الأخرى من المشاكل تظهر فى مشاكل تكرير البترول . فبنزين السيارات مثلا لابد

وأن يخضع لمواصفات معينة خاصة بضبط الاشعال ونسبة الاكوتين .. وغيرها ويفتج البنزين من عدد أنواع مميزة من زيت البترول النقى . وتبين البرمجة الخطية كيفية تحقيق أدنى تكلفة لتكرير والحصول على البنزين من نوع معين « سوبر مثلا » .

وغالبا مانجد الحلول التى يحصل عليها من تطبيق البرمجة الخطية على بعض المشاكل العملية قريبة جداً من الحلول التى يصل إليه الرجل العملى باستخدام التجربة والخطأ . وينتهى تحليل البرمجة الخطية عادة إلى خطط لتخفيض التكاليف بنسبة لاتزيد على ٣ ٪ أو ٥ ٪ وقد تخدم الخبره والمران العملى الدقيق إلى نفس النتائج وعلى نفس درجة الجوده من تلك التى نحصل عليها من الحسابات الأساسية . وقد تكون الحلول التى نحصل عليها بالتجربة والخطأ جيده ، ولكن كيف يتأكد الفرد منا أن هذه الحلول هى فى الحقيقة حلول مثلى ؟ . وهذا فى الحقيقة هو أحد الإنجازات العظيمة للبرمجة الخطية . فحتى لو افترضنا أن النتائج واحده والاجابة على التساؤلات هى نفس الإجابات التى يصل إليها ذوى الخبرة نتيجه للممارسة والمران فان منطق البرمجة الخطية يستطيع إثبات وتأكيد أن الإجابة التى تصل إليها هى فى الحقيقة ، تمثل الوضع الامثل . وعادة مايصادف رجال الأعمال وباستمرار مشاكل جديدة فى نوعها تماما بحيث لأيجد الرياضيون منافسة فى حلها مع ذوى الخبرة العملية من رجال الاعمال .

ومثلما هو الحال بالنسبة للنظرية التقليدية ، فإن البرمجة

الخطية تستطيع أن تؤدى إلى نتائج واضحة عند التمسك بفكرة التعظيم أو تدنية متغير معين بذاته والحلول التى تحصل عليها من التطبيق لاتختلف فى دقتها وكمالها عن دقة وكمال المعلومات التى تستخدم فى الحساب .. ومن هنا فان سلامة نتائج التحليل مرهونة بسلامة المعلومات والبيانات المستخدمة .

الفصل العاشر

الأساليب الرياضية فى تحليل سلوك المنتج

ننتقل الآن إلى استخدام الأساليب الرياضية فى دراسة سلوك المنتج وهو الوحدة الأساسية فى جانب الإنتاج التى تناظر المستهلك فى جانب الطلب . . وهنا نجد أنه من الممكن تطبيق نفس الأدوات التحليلية التى استخدمناها فى الفصل الرابع ولكن بصورة مختلفة بعض الشيء ومع اختلاف بسيط فى معانى الرموز المستخدمة . والواقع أن الاختلاف الظاهرى بين النظريتين يمكن أن يتضح عدم جوده ، لو أننا اتبعنا نفس الأسلوب الذى اتبعناه بالنسبة للمستهلك . ولذلك نبدأ بتحديد مجموعة البيانات اللازمة للمنتج . وهنا نجد أننا فى حاجة أولا إلى تحديد نوع السوق الذى يتعامل فيه المنتج سواء كان سوق عوامل الإنتاج أو سوق الناتج النهائى . وسنقتصر هنا على حالة المنافسة الكاملة ونعتبر أن المنتج لا يستطيع أن يؤثر فى أسعار العناصر وهى $ع_1$ ، $ع_2$ مع اعتبار أن المنتج يستخدم عنصرين فقط . كما أنه لا يستطيع أن يؤثر فى سعر الناتج وليكن هو ر .. كذلك نعتبر أن المنتج يستطيع عن طريق مهندس الانتاج الذى يعمل معه أن يعرف الإمكانيات الفنية التى يمكن على أساسها تنظيم عملية الانتاج . . أى يستطيع أن يحدد حجم الناتج ص الذى يناظر استخدامات معينة $س_1$ ، $س_2$ من العنصرين الانتاجيين .

هذا يفترض أنه من الممكن الحصول على قيمة وحيدة المتغير ص بمعرفة قيمة كل من $س_1$ ، $س_2$ أى أننا لدينا دالة وحيدة القيمة فى ($س_1$ ، $س_2$) ولتكن هى :

$$ص = د (س_١ ، س_٢) \quad (١)$$

تسمى باسم دالة الانتاج Production function وبطبيعة الحال تتوقف هذه الدالة على مستوى فنون الانتاج السائد ، وعلى نوع السلعة المنتجة . وسنفترض أن هذه المعلومات ثابتة ومعروفة لدى المنتج .

ومن الممكن اشتقاق بعض الخواص البسيطة لهذه الدالة فنرى مثلا أنه إذا زاد المستخدم من أحد العنصرين أو من كليهما فإن ص لا يمكن أن تنقص ، بل غالبا ما تزيد . . ولأغراض التحليل الرياضى سنفترض أنها دالة متصلة بمعنى أنه من الممكن إيجاد معدلات تفاضلها بالنسبة إلى كل من $س_١$ ، $س_٢$ تفاضل أول وتفاضل ثانى . .

فإذا علمت أن هذه الدالة لدى المنتج . فإنه من الممكن إيجاد أزواج القيم المختلفة من $س_١$ ، $س_٢$ اللازمة لانتاج حجم معين من الناتج . ولتكن تساوى ص . . هذه القيم يمكن عادة تمثيلها بما يسمى منحنيات سواء الانتاج فى مستوى الاستخدامات التى يتمثل فى المستوى المحدد بالعنصرين $س_١$ ، $س_٢$.

ويتضح من هذا أنه من الممكن إنتاج نفس الناتج باستخدامات مختلفة مما يستدعى أولا . . أن يقرر المنتج أى من هذه الاستخدامات يفضل . . وهنا نجد أن أفضليه نقطة عن الأخرى تتوقف على مدى النفقات التى يتكبدها المنتج . وتتوقف هذه ، بالتالى ، على أسعار عناصر الانتاج ، وهى كما قلنا معلومة لدينا .

ومن الممكن التعبير عن هذه البيانات بيانيا برسم خطوط السعر تماثل خطوط السعر فى حالة المستهلك وهى خطوط متوازية كل منها يمثل إنفاقا معينا .

ولما كان الاتفاق الكلي غير محدد لدى المنتج بعكس الحال عند المستهلك ، فإن موضع الخط الذى يمكن أن يتوازن المنتج عند نقطة منه يكون غير معلوم . وعلينا إذاً أن نبحث عنه . ولذلك نجد أن نظرية المنتج تحتاج إلى خطوة إضافية لم تكن موجودة فى نظرية المستهلك وهذا يتطلب منا إضافة شروط جديدة .

الشرط الأول :

هو أن المنتج يسعى إلى تحقيق أقصى ربح ممكن على ضوء المعلومات المتاحة لديه . . فإذا عبرنا عن الربح بالرمز ح فإننا نجد أن الايراد الكلى يساوى ر ص .

بينما النفقات الكلية $ن = ع_1 س_1 + ع_2 س_2$.

وبذلك تكون الأرباح هى :

$$ح = ر ص - ن$$

$$= ر ص - ع_1 س_1 - ع_2 س_2 \qquad (٢)$$

أى أن المنتج يسعى إلى جعل المقدار ح أكبر ما يمكن .

الشرط الثانى :

وهو يتفق مع الأول ، فهو أن المنتج يختار من مجموعات النفقات الكلية اللازمة لانتاج ناتج معين ذلك المستوى الذى يعتبر أدنى ما يمكن على ضوء الأسعار السائدة . . فإذا سعى المنتج لتحقيق هذا الشرط فإنه يستطيع عن طريق تعيين استخدام معين من العناصر من بين الاستخدامات المختلفة لكل مستوى معين من مستويات الناتج . وهذا هو ما يسمى برسم خطة الاستخدام .

ولكى يحدد الناتج الذى يجب أن يصل إليه ، فإنه يسعى إلى تحقيق الشرط الخاص بالوصول إلى أقصى ربح ، فيصل بذلك إلى الجزء الثانى من قراراته وهو الخاص برسم خطة الانتاج ، وبذلك يكون قد استطاع أن يرسم خطتى الانتاج والاستخدام معا . ولنبدأ الآن بالثانية .

خطة الاستخدام

يتضح مما سبق أن الهدف فى هذه الخطة هو معرفة النفقات الكلية الدنيا التى يمكن أن يتكبدها المنتج لانتاج حجم معين ص من الناتج بدون أن يخل بالاعتبارات الفنية التى تحددها فنون الانتاج المتاحة له . وبعبارة أخرى ، فإن المنتج يسعى إلى جعل :

$$\text{ن} = \text{ع}_{1}\text{س}_{1} + \text{ع}_{2}\text{س}_{2} \quad \text{نهاية صغرى} \qquad (٣)$$

بشرط أن س_{1} ، س_{2} تحققان العلاقة :

$$\text{د}\,(\text{س}_{1}\,،\,\text{س}_{2}) = \text{ص} \qquad (٤)$$

ومعنى هذا أننا نستطيع تطبيق قواعد إيجاد النهايات المشروطة كما فعلنا فى حالة نظرية المستهلك مع ملاحظة أننا نعتبر ق هنا كمتغير . وأن قيمتها بالتالى يجب أن تصل إلى نهاية صغرى وليست محددة بقيد شرط ما كما فعلنا فى المستهلك بينما أن الدالة د يجب أن تساوى هنا مقدار معلوم وهو ص وليست متغيرة كما فى حالة المستهلك ، ولذلك استخدمنا مما شرط يحد النهاية الصغرى .

إذا علينا أن تكون دالة جديدة تضم الدالة المراد إيجاد نهايتها مع الشرط المقيد لها موضوعا فى الصورة الصفرية . وهذا يستدعى استخدام معامل لاجرانج وليكن هو ح فتكون الدالة هى مثلا ط :

لو فرضنا أن لدينا $\text{د}(\text{س}_1 ، \text{س}_2) - \text{ص} = \text{صفر}$

$\text{ق} - \text{ح}\left[\text{د}(\text{س}_1 ، \text{س}_2) - \text{ص}\right] = \text{نهاية صغرى}$

يصبح لدينا ثلاثة مجاهيل س_1 ، س_2 ، ح ونحتاج إلى ثلاثة معادلات بأن نفاضل بالنسبة إلى كل من هذه المجاهيل الثلاثة ونساوي النواتج بالصفر .

وهنا نلاحظ أن :

$$\frac{\partial \text{ق}}{\partial \text{س}_1} = \text{ع}_1 \quad ، \quad \frac{\partial \text{ق}}{\partial \text{س}_2} = \text{ع}_2$$

$$، \quad \frac{\partial \text{د}(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_1} = \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_1} = \text{ص}_1$$

وبالمثل

$$\frac{\partial \text{د}(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{س}_2} = \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_2} = \text{ص}_2$$

أما $\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_1} = \text{صفر}$ لأن ص ثابته

، $\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_2} = \text{صفر}$ أيضاً وأخيراً نلاحظ أن $\frac{\partial \text{ق}}{\partial \text{ح}} = \text{صفر}$

وعلى ذلك نجد أن المعادلات الثلاث المطلوبة هي :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}_1} &: \text{ع}_1 - \text{ح}\,\text{ص}_1 = \text{صفر} \\
\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}_2} &: \text{ع}_2 - \text{ح}\,\text{ص}_2 = \text{صفر} \\
\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{ح}} &: \text{د}(\text{س}_1 ، \text{س}_2) - \text{ص} = \text{صفر}
\end{aligned}\right\} \quad (٦)$$

هذه المعادلات هي شروط التوازن لبلوغ النهاية الصغرى للنفقات (التكاليف) ولو أنها لا تضمن أن تكون النفقات صغرى بالفعل .

ويتضح من المعادلتين الأولين أنه لكي يتحقق التوازن لا بد وأن :

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{ص}_1} = \frac{\text{ع}_2}{\text{ص}_2} \qquad (٧)$$

أي أن النسب بين الأسعار كالنسب بين المقادير ص١ ، ص٢ وهذه الأخيرة ما هي إلا النواتج الحدية للعنصرين :

$$\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_1} = \text{ص}_1$$ الناتج الحدى للأول

وبالمثل $$\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_2} = \text{ص}_2$$ الناتج الحدى الثانى

وكذلك يتضح من هاتين المعادلتين أن معامل لاجرانج هو ح

$$\text{ح} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ص}_1} \quad \text{مثلا} \qquad (٨)$$

وبذلك يمكننا أن نقول أنها هى عبارة عن النفقة الحدية للانتاج وسوف نثبت فيما بعد أن هذا هو حقيقة معنى ح فعلا . .

فإذا علمنا قيمة كل من س١ ، س٢ المقابلة للمقدار ص من الانتاج والتى تحقق الشروط السابقة فإنا نتوقع أن تكون هى فعلا المحققة لنهاية صغرى من النفقات لو أن الشرط الثانى للنهاية الصغرى تحقق . وكما ذكرنا من قبل فإن

هذا الشرط يعنى استخدام التفاضلات الثانية للدالة ط وإدخال أى مقادير اعتبارية مثل $ا_1$ ، $ا_2$ بحيث أن النهاية الصغرى تتحقق عندها :

$$ا_1^2 \, ط_{11} + ا_1 ا_2 \, ط_{21} + ا_2 ا_1 \, ط_{12} + ا_2^2 \, ط_{22} > \text{صفر} \qquad (٩)$$

ونلاحظ أن

$$ط_{11} = \frac{\partial^2 ع}{\partial س_1^2} - \frac{\partial^2 ح (ص - ص)}{\partial س_1^2}$$

$$= \frac{\partial (ع_1)}{\partial س_1} - \frac{\partial (ح ص_1)}{\partial س_1}$$

$$= \text{صفر} - ح \frac{\partial ص_1}{\partial س_1} = - ح ص_{11}$$

وبالمثل $ط_{21} = \qquad = - ح ص_{21}$

، $ط_{22} = \qquad = - ح ص_{22}$

وبالتعويض فى المتباينة السابقة عن التفاضلات الثانية للدالة ط نجد أنه من الممكن التخلص من ح نظراً لأنها موجبة فيكون المقدار هو :

$$-(ا_1^2 ص_{11} + ا_1 ا_2 ص_{21} + ا_2 ا_1 ص_{12} + ا_2^2 ص_{22}) > \text{صفر}$$

وبالتخلص من الاشارة السابقة يجب أن نغير إشارة التباين فيصبح الشرط الثانى :

$$ا_1^2 ص_{11} + ا_1 ا_2 ص_{21} + ا_2 ا_1 ص_{12} + ا_2^2 ص_{22} < \text{صفر} \qquad (١٠)$$

ونلاحظ إذاً أن هذا الشرط يكافىء الشرط الذى كان يمكن استنتاجه

لو أننا عملنا الانفاق وجعلنا ص نهاية عظمى كما حدث بالنسبة للمستهلك وهذا ما يجب أن ننتظره لأن أي من العمليتين يعطي نفس النتيجة وينتج من حل الشروط اللازمة لبلوغ النهاية الصغرى أن يكون من الممكن التعبير عن كل من $س_١$ ، $س_٢$ في شكل دوال في المعلومات وهي ص ، $ع_١$ ، $ع_٢$ ونستطيع إذاً أن نكتب المعادلات (٦) بصورة مختلفة كالآتي :

$$س_١ = م_١ (ص ، ع_١ ، ع_٢)$$

$$س_٢ = د_٢ (ص ، ع_١ ، ع_٢)$$

$$ح = د_٣ (ص ، ع_١ ، ع_٢)$$

وواضح أن المعادلتين الأوليين في هذه المجموعة هي معادلة الطلب على العنصرين ، وهاتان المعادلتان تبينان أن المطلوب من كل من العنصرين يتوقف على حجم الانتاج وعلى سعرى العنصرين . وهذا هو السبب في أننا افترضنا أن المنتج يحدد أولا الحجم الذى يريده ، ثم يبحث عن النفقات الدنيا بدلا من العكس . وبهذا تكون قد عينا الاستخداما ت $س_١$ ، $س_٢$ المناظرة لكل حجم من أحجام الناتج الممكن تصورها . ويبقى بعد ذلك الجزء الثاني من الخطة وهو خطة الانتاج .

ومن الممكن معرفة هذه الخطة لو أننا حسبنا النفقات الدنيا كما تتحدد من خطة الاستخدام . فلو رمزنا إلى هذه النفقات بالرمز $\hat{ن}$ وإلى مقادير العنصرين بالرمز $\hat{س}_١$ ، $\hat{س}_٢$ فإن النفقات الدنيا تكون هي $\hat{ن}$:

$$\hat{ن} = ع_١ \hat{س}_١ + ع_٢ \hat{س}_٢$$

حيث $\hat{س}_١$ ، $\hat{س}_٢$ تحققان معادلتي الطلب ، أي أن

$$\hat{\text{ن}} = \text{ع}_1 \times \text{د}_1(\text{ص} ، \text{غ}_1 ، \text{ع}_2) + \text{ع}_2 \times \text{د}_2(\text{ص} ، \text{ع}_1 ، \text{ع}_2) \quad (١٢)$$

أى أن النفقات الكلية الدنيا تكون هى الأخرى دالة فى ع_1 ، ع_2 ، ص .

تعيين خطة الانتاج

ذكرنا فى البداية أن المنتج يسعى إلى تحقيق أقصى ربح له . أى إلى جعل الفرق بين الإيراد الكلى والنفقات الكلية الدنيا أكبر ما يمكن .

وعلى ذلك فإننا لتعيين نقطة التوازن نبحث عن قيمة ص ، أى الإنتاج الكلى التى تجعل المقدار .

$$\text{ح} = \text{ر} \times \text{ص} - \hat{\text{ن}} \qquad \text{نهاية عظمى}$$

ونلاحظ هنا أننا افترضنا أن ر مقدار ثابت . ولذلك فإن المقدار ر ص الذى يمثل الإيراد الكلى تكون هى الأخرى دالة فى ص .

ومن جهة أخرى فإن النفقات الكلية الدنيا قد حسبت بمعلومية سعرى العنصرين ع_1 ، ع_2 لكل قيمة من قيم ص ولذلك فإن المقدار $\hat{\text{ن}}$ الذى يمثل النفقات الكلية الدنيا هو أيضاً دالة فى ص .

وينتج عن ذلك أنه بمعلوميه ر ، ع_1 ، ع_2 تكون الأرباح ح دالة فى ص ويكفى للبحث عن نهايتها العظمى تحت هذه الشروط أن نوجد تفاضل ح بالنسبة إلى ص ثم نساويه بالصفر .

وعلى ذلك نجد أن شرط النهاية العظمى اللازم هو $\frac{\delta \text{ ع}}{\delta \text{ س}} =$ صفر

$$\therefore \text{ أي أن } \frac{\delta (\text{ر} \times \text{س})}{\delta \text{ س}} - \frac{\delta \hat{\text{ن}}}{\delta \text{ س}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ر} - \frac{\delta \hat{\text{ن}}}{\delta \text{ س}} = \text{صفر ومنها } \text{ر} = \frac{\delta \hat{\text{ن}}}{\delta \text{ س}}$$

أي أنه لكي يتحقق توازن المنتج لا بد وأن الإيراد الحدى يساوى النفقة (التكلفة) الحدية الدنيا المناظرة .

ولكي نتأكد من أنه عند هذه النقطة تكون الأرباح فعلا أقصى ما يمكن لا بد لنا من تطبيق الشرط الثانى للنهاية العظمى وهو فى هذه الحالة عبارة عن

$$\frac{\delta^{2} \text{ ع}}{\delta \text{ س}^{2}} < \text{صفر}$$

$$\text{ولكن } \frac{\delta^{2} \text{ ع}}{\delta \text{ س}^{2}} = \frac{\delta}{\delta \text{ س}}\left(\frac{\delta \text{ ع}}{\delta \text{ س}}\right) = \frac{\delta}{\delta \text{ س}}\left[\text{ر} - \frac{\delta \hat{\text{ن}}}{\delta \text{ س}}\right]$$

$$= \text{صفر} - \frac{\delta^{2} \text{ ن}}{\delta \text{ س}^{2}} = - \frac{\delta^{2} \text{ ن}}{\delta \text{ س}^{2}}$$

نظراً لأن ر ثابتة أي لا تتوقف على س فرضاً .

ويكون الشرط الثاني هو $-\frac{\delta^{2} ن}{\delta س^{2}} <$ صفر

أي أن $\frac{\delta^{2} ن}{\delta س^{2}} >$ صفر

هذا الشرط يعني أنه لكي يصل المنتج إلى نهاية عظمى فعلا . . لا بد و أن يكون معدل تغير النفقة الحدية $\overset{8}{\left(\frac{\delta ن}{\delta س}\right)}$ بالنسبة إلى تغير س وهو ما يعبر عنه بالمقدار $\left(\frac{\delta^{2} ن}{\delta س^{2}}\right)$ . . هذا المعدل يجب أن يكون موجباً .

وبعبارة أخرى فلا بد وأن تكون النفقة الحدية متزايدة عند نقطة التوازن .

الخلاصة . .

يتلخص الموقف إذاً في الآتي :

لكي يصل المنتج إلى نقطة التوازن لا بد وأن يحسب . أولا : الاستخدامات من العناصر التي تحقق له أقل نفقات كلية ممكنة لكل قيمة من قيم الانتاج س وهو ما سميناه بخطة الاستخدام وبمعلومية هذه النفقات الكلية الدنيا والسعر س الناتج فإن التوازن يتحقق عندما :

١ — الإيراد الحدي = النفقة الحدية .

٢ — النفقة الحدية متزايدة عند هذه النقطة .

مثـال :

أوجد خطة الاستخدام المثلى لمنتج دالة إنتاجه هي :

$\text{ص} = \text{س}_1 \, \text{س}_2$ ، ثم عين خطة الانتاج التوازنية إذا علمت

أن $\text{ح} = 1$ ، $\text{ع}_1 = 2$ ، $\text{ع}_2 = 3$

الحـل :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ع}_1 - \text{ح}\,\text{ص}_1 = \text{صفر} \\ \text{ع}_2 - \text{ح}\,\text{ص}_2 = \text{صفر} \\ \text{د}(\text{س}_1^2\,\text{س}_2) - \text{ص} = \text{صفر} \end{array} \right.$$

$$\therefore \frac{\text{ع}_1}{\text{ص}_1} = \frac{\text{ع}_2}{\text{ص}_2} \quad \text{أى أن} \left\{ \begin{array}{l} \text{ع}_1\,\text{ص}_2 = \text{ع}_2\,\text{ص}_1 \\ \text{د}(\text{س}_1 ، \text{س}_2) - \text{ص} = \text{صفر} \end{array} \right.$$

نحسب ص_1 ، ص_2

$$\text{ص}_1 = \frac{\partial\,(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial\,\text{س}_1} = \text{س}_2$$

$$\text{ص}_2 = \frac{\partial\,(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial\,\text{س}_2} = \text{س}_1$$

وبالتعويض فى شروط التوازن نجد أن :

$$\text{ع}_1\,\text{س}_1 = \text{ع}_2\,\text{س}_2$$

$$\text{،}\ \text{س}_1\,\text{س}_2 = \text{ص}$$

$$\therefore\ \text{س}_2 = \frac{\text{ع}_1\,\text{س}_1}{\text{ع}_2}$$

نعتبر ص = ص وذلك لأنها تتغير ثم نعوض فى المعادلة $\text{ص} = \text{س}_1\text{س}_2$

$$\text{ص} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\,\text{س}_1^{2}$$

$$\therefore\ \text{س}_1^{2} = \frac{\text{غ}_2}{\text{ع}_1}\,\text{ص}$$

وبأخذ الجذور :

$$\therefore\ \text{س}_1 = \sqrt{\frac{\text{ع}_2\,\text{ص}}{\text{ع}_1}}\ \text{،}\ \therefore\ \text{س}_2 = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\sqrt{\frac{\text{ع}_2\,\text{ص}}{\text{ع}_1}} = \sqrt{\frac{\text{ع}_1\,\text{ص}}{\text{ع}_2}}$$

∴ النفقات الكلية الدنيا هى :

$$\hat{\text{ق}} = \text{ع}_1\,\text{س}_1 + \text{ع}_2\,\text{س}_2$$

$$= \text{ع}_1\sqrt{\frac{\text{ع}_2\,\text{ص}}{\text{ع}_1}} + \text{ع}_2\sqrt{\frac{\text{ع}_1\,\text{ص}}{\text{ع}_2}}$$

$$= \sqrt{\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ص}} + \sqrt{\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ص}}$$

$$= 2\sqrt{\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ص}}$$

من هذا يتضح أن النفقات الكلية الدنيا هى دالة فى كل من $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ ، ص وبمعلومية $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ نجد أن :

$$\hat{\text{ن}} = ٢\sqrt{٢ \times ٣\,\text{ص}} = ٢\sqrt{٦\,\text{ص}}$$

وهذه هى خطة الاستخدام للمنتج وعندها يستخدم :

$$\text{س}_{١} = \sqrt{\frac{٣}{٢}\,\text{ص}}$$

$$\text{س}_{٢} = \sqrt{\frac{٢}{٣}\,\text{ص}}$$

ولكى نعرف خطة الانتاج نجد أن :

$$\text{ح} = \frac{\delta\,\hat{\text{ن}}}{\delta\,\text{ص}} \quad \text{ولكن} \quad \frac{\delta\,\hat{\text{ن}}}{\delta\,\text{ص}} = \frac{\delta\,٢\sqrt{٦\,\text{ص}}}{\delta\,\text{ص}}$$

$$= ٢ \times \sqrt{٦}\,\frac{\delta\sqrt{\text{ص}}}{\delta\,\text{ص}}$$

$$= ٢ \times \sqrt{٦} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}}$$

$$= \sqrt{\frac{٦}{\text{ص}}}$$

∴ الشرط اللازم للتوازن هو :

$$١ = \sqrt{\frac{٦}{\text{ص}}} \qquad ∴ \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{٦}$$

ومنها ص = ٦ وعلى ذلك تكون الاستخدامات هي :

$$\text{س}_{١} = \sqrt{\frac{٣}{٢} \times ٦}$$

أي $\text{س}_{١} = ٣$

$$\text{س}_{٢} = \sqrt{\frac{٢}{٣} \times ٦} = ٢$$

ص = ٦

التوازن الاستاتيكى المقارن فى تحليل سلوك المنتج

١ — تغير سعر العنصر الأول $ع_1$ مع ثبات باقى الأشياء ($ع_2$ ، ر)

لنفرض أننا تركنا سعر العنصر الأول يتغير مع ثبات باقى الأشياء التى افترضنا ثباتها عند تعيين خطة الاستخدام . . فى هـذه الحالة يجد المنتج نفسه مضطراً لإعادة حساب نفقاته وتعيين أنسب الاستخدامات من العنصرين ($س_1$ ، $س_2$)) . وبعد ذلك يمكنه حساب النفقات الكلية الدنيا ثم يعين خطة الإنتاج المثلى .

وعلى هذا سنفترض أن $ع_1$ تغيرت مع ثبات $ع_2$ ، ر ، ص ولكن ندرس أثر هذا التغير على المقدارين المستخدمين من العنصرين ($س_1$ ، $س_2$) بدون الالتجاء إلى معادلات الطلب على العناصر نبدأ بشروط التوازن للاستخدام وهى :

$$\left\{\begin{array}{l} ع_1 - ح\,س_1 = صفر \\ ع_2 - ح\,س_2 = صفر \\ د(س_1 ، س_2) - ص = صفر \end{array}\right. \qquad (١)$$

ونلاحظ أن معادلات الطلب تعنى أن كلا من $س_1$ ، $س_2$ تتوقف على $ع_1$. وبالتالى فإن $س_1$ ، $س_2$ دوال فى $ع_1$ لأنها دوال فى $س_1$ ، $س_2$.

كذلك نجد أن ح لا بد وأن تتوقف على $ع_1$ وعند إجراء المفاضلة بالنسبة إلى $ع_1$ نجد أن :

$$\frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{ع}_1} = \frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{س}_1} \times \frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}_1} + \frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{س}_2} \times \frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ع}_1}$$

$$= \text{ص}_{11} \times \left(\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}_1}\right) + \text{ص}_{12} \times \left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ع}_1}\right)$$

وبالمثل $$\frac{\partial \text{ص}_2}{\partial \text{ع}_1} = \text{ص}_{12} \times \left(\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}_1}\right) + \text{ص}_{12} \times \left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ع}_1}\right)$$

وبأخذ تفاضل المعادلة الأولى من شرط التوازن نجد أن :

$$1 + \text{ح} \left[\text{ص}_{11} \left(\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}_1}\right) + \text{ص}_{21} \left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ع}_1}\right) \right.$$

$$\left. - \text{ص}_1 \left(\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ع}_1}\right) = \text{صفر} \right.$$

وبأخذ تفاضل المعادلة الثانية نجد أن :

$$- \text{ح} \left[\text{ص}_{12} \left(\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}_1}\right) + \text{ص}_{22} \left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ع}_1}\right) \right]$$

$$- \text{ص}_2 \left(\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ع}_1}\right) = \text{صفر}$$

ولإيجاد تفاضل المعادلة الأخيرة نلاحظ أن المقدار ص ثابت بينما د (س_1 ، س_2) = ص تتوقف على (ع_1) بسبب توقفها على كل من س_1 ، س_2 .

$$\therefore \quad \frac{\partial\, \text{د}(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial\, \text{ع}_1} = \frac{\partial\, \text{ص}}{\partial\, \text{ع}_1}$$

$$= \frac{\partial\, \text{ص}}{\partial\, \text{س}_1} \times \frac{\partial\, \text{س}_1}{\partial\, \text{ع}_1} + \frac{\partial\, \text{ص}}{\partial\, \text{س}_2} \times \frac{\partial\, \text{س}_2}{\partial\, \text{ع}_1}$$

$$= \text{ص}_1 \times \left(\frac{\partial\, \text{س}_1}{\partial\, \text{ع}_1}\right) + \text{ص}_2 \times \left(\frac{\partial\, \text{س}_2}{\partial\, \text{ع}_1}\right)$$

وعلى ذلك نستطيع كتابة الثلاث معادلات الناتجة من التفاضل بعد قسمه الأولى والثانية منها على — ح كالآتى :

$$\left[\begin{array}{l} \text{ص}_{11} \left(\frac{\partial\, \text{س}_1}{\partial\, \text{ع}_1}\right) + \text{ص}_{21} \left(\frac{\partial\, \text{س}_2}{\partial\, \text{ع}_1}\right) \\ \qquad + \frac{\text{ص}_1}{\text{ح}} \left(\frac{\partial\, \text{ح}}{\partial\, \text{ع}_1}\right) = \frac{1}{\text{ح}} \\ \text{ص}_{12} \left(\frac{\partial\, \text{س}}{\partial\, \text{ع}_1}\right) + \text{ص}_{22} \left(\frac{\partial\, \text{س}_2}{\partial\, \text{ع}_1}\right) \\ \qquad + \frac{\text{ص}_2}{\text{ح}} \left(\frac{\partial\, \text{ح}}{\partial\, \text{ع}_1}\right) = \text{صفر} \\ \text{ص} \left(\frac{\partial\, \text{س}_1}{\partial\, \text{ع}_1}\right) + \text{ص}_2 \left(\frac{\partial\, \text{س}_2}{\partial\, \text{ع}_1}\right) = \text{صفر} \end{array}\right] \quad (٧)$$

بحل هذه المعادلات نوجد :

$$\text{محدد المقام} = \begin{vmatrix} \frac{\text{ص}_1}{\text{ح}} & \text{ص}_{21} & \text{ص}_{11} \\ \frac{\text{ص}_2}{\text{ح}} & \text{ص}_{22} & \text{ص}_{12} \\ \text{صفر} & \text{ص}_2 & \text{ص}_1 \end{vmatrix} = \Delta \qquad (٣)$$

$$\text{و محدد البسط} \left(\frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{ع}_1}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\text{ص}_1}{\text{ح}} & \text{ص}_{21} & \frac{1}{\text{ح}} \\ \frac{\text{ص}_1}{\text{ح}} & \text{ص}_{22} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{ص}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix} = -\frac{\text{ص}_2^2}{\text{ح}^2}$$

ويتضح من هذا أن ارتفاع سعر العنصر الأول يدعو المنتج إلى محاولة إنقاص هذا العنصر لكى يستعيض عنه بالعنصر الآخر .

ويصل بذلك إلى نفس الإنتاج الذى يسعى إليه وهو ص .

ويكون معدل الإحلال الواقع هو :

$$\frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{ع}_1} = -\frac{\text{ص}_2^2}{\text{ح}^2\,\Delta} \qquad (٤)$$

وهو مقدار تتوقف قيمته وإشارته على إشارة Δ وسنرى أنها موجبة .

بسط $\left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ع}_1}\right) = \begin{vmatrix} \text{ص}_{11} & \frac{1}{\text{ح}} & -\frac{\text{ص}_1}{\text{ح}} \\ \text{ص}_{12} & \text{صفر} & -\frac{\text{ص}_2}{\text{ح}} \\ \text{ص}_1 & \text{صفر} & \text{صفر} \end{vmatrix}$ (٥)

$$= -\frac{1}{\text{ح}} \begin{vmatrix} \text{ص}_{12} & -\frac{\text{ص}_2}{\text{ح}} \\ \text{ص}_1 & \text{صفر} \end{vmatrix} = \frac{\text{ص}_1 \text{ص}_2}{\text{ح}^2}$$

= مقدار موجب

$$\therefore \frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ع}_1} = \frac{\text{ص}_1 \text{ص}_2}{\Delta \, \text{ح}^2}$$

وأخيراً فإن $\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ع}_1} = \frac{\text{ص}_2 \text{ص}_{12} - \text{ص}_1 \text{ص}_{22}}{\Delta \, \text{ح}}$ (٦)

<u>٢ — تغير ع_2 مع ثبات باقي الأشياء :</u>

يمكن بنفس الطريقة إثبات أن :

$$\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}_2} = \frac{\text{ص}_1 \text{ص}_2}{\Delta \, \text{ح}^2}$$ (٤)

$$\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ع}_2} = \frac{\text{ص}_1^2}{\Delta\ \text{ح}^2} \quad \text{،} \qquad (\bar{5})$$

$$\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ع}_2} = \frac{\text{ص}_1 \text{ص}_{21} - \text{ص}_2 \text{ص}_{11}}{\Delta\ \text{ح}} \quad \text{،} \qquad (\bar{6})$$

٣ — <u>تغير حجم الإنتاج ص :</u>

حصلنا على شروط التوازن فى خطة الاستخدام بافتراض أن المقدار المراد إنتاجه وهو ص ثابت عند قيمة معينة ص.

نفترض الآن أن ص تغيرت مع ثبات ع_1 ، ع_2 . ولكى نحصل على معدلات التغير المطلوبة تفاضل شروط التوازن . أى المعدلات (١) بالنسبة إلى حجم الناتج ص مع استبدال المقدار ص بالمتغير ص . وفى هذه الحالة نجد أن تفاضل المقدار ص_1 هو $\frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{ص}}$

$$\frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{س}_1} = \frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial \text{ص}_1}{\partial \text{س}_2} = \frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}$$

<u>تفسير ..</u>

ص_1 دالة فى س_1 ، س_2 وحسب معادلات الطلب س_1 ، س_2 .

نجد أن $\text{س}_1 = \text{هـ}_1 (\text{ع}_1 ، \text{ع}_2 ، \text{ص})$

وكذلك $\text{س}_2 = \text{د}_2(\text{ع}_1 ، \text{ع}_2 ، \text{ص})$

∴ ص_1 دالة فى ص عن طريق س_1 ، س_2

تفاضل المعادلات فى المجموعة (١):

$$\text{صفر} - \text{ح}\left[\text{ص}_{11}\left(\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}}\right) + \text{ص}_{21}\left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}\right)\right]$$

$$-\text{ص}_1\left(\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ص}}\right) = \text{صفر}$$

وبالمثل يمكن إيجاد تفاضل المعادلة الثانية :

$$- \text{ح}\left[\text{ص}_{12}\left(\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}}\right) + \text{ص}_{22}\left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}\right)\right]$$

$$-\text{ص}_2\left(\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ص}}\right) = \text{صفر}$$

وتفاضل المعادلة الثالثة يتم كالآتى :

$$\frac{\partial \text{د}(\text{س}_1 ، \text{س}_2)}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_1} \times \frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}} + \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{س}_2} \times \frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}$$

$$= 1 = \text{ص}_1\left(\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}}\right) + \text{ص}_2\left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}\right)$$

وينتج عن هذا أن تفاضل معادلات التوازن بالنسبة إلى ص يعطينا الآتى :

$$
\left[
\begin{array}{l}
\text{ص}_{11}\left[\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}}\right] + \text{ص}_{21}\left[\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}\right] \\
\qquad + \frac{\text{ص}_{13}}{\text{ح}}\left[\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ص}}\right] = \text{صفر} \\
\text{ص}_{12}\left[\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}}\right] + \text{ص}_{22}\left[\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}\right] \\
\qquad + \frac{\text{ص}_{23}}{\text{ح}}\left[\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ص}}\right] = \text{صفر} \\
\text{ص}\left[\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}}\right] + \text{ص}_{2}\left[\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}\right] + = 1
\end{array}
\right] \quad (7)
$$

ونلاحظ أن محدد المقام فى هذه الحالة أيضا هو نفس المحدد $\triangle$ الذى وجدناه فى المعادلة (٣) من قبل . ولذلك فإن من السهل كتابة معدلات التغير المطلوبة بدلالة $\triangle$ كالآتى :

$$
\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}} = \frac{1}{\Delta} \times
\begin{vmatrix}
\text{صفر} & \text{ص}_{21} & \frac{\text{ص}_{11}}{\text{ح}} \\
\text{صفر} & \text{ص}_{22} & \frac{\text{ص}_{21}}{\text{ح}} \\
1 & \text{ص}_{2} & \text{صفر}
\end{vmatrix}
$$

$$= \frac{\text{ص}_2\,\text{ص}_{21} - \text{ص}_1\,\text{ص}_{22}}{\Delta\ \text{ح}} \qquad (٨)$$

وبالمثل $$\frac{\partial\, \text{س}_2}{\partial\, \text{ص}} = \frac{\text{ص}_1\,\text{ص}_{12} - \text{ص}_2\,\text{ص}_{11}}{\Delta\ \text{ح}} \qquad (٩)$$

وأخيراً $$\frac{\partial\, \text{ح}}{\partial\, \text{ص}} = \frac{\text{ص}_{11}\,\text{ص}_{22} - \text{ص}_{21}\,\text{ص}_{12}}{\Delta} \qquad (١٠)$$

ولإيجاد معدلات التغير سابقة الذكر لا بد لنا من معرفة قيمة المحدد Δ أو على الأقل إشارته . ويمكن تحقيق ذلك باستخدام الشرط الثانى للنهاية العظمى وذلك على النحو التالى : —

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{ص}_{11} & \text{ص}_{21} & \frac{\text{ص}_1}{\text{ح}} \\ \text{ص}_{12} & \text{ص}_{22} & \frac{\text{ص}_2}{\text{ح}} \\ \text{ص}_1 & \text{ص}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\text{ح}} \begin{vmatrix} \text{ص}_{11} & \text{ص}_{21} & \text{ص}_1 \\ \text{ص}_{12} & \text{ص}_{22} & \text{ص}_2 \\ \text{ص}_1 & \text{ص}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\text{ح}} \left[\text{ص}_{1} \times \begin{vmatrix} \text{ص}_{21} & \text{ص}_{1} \\ \text{ص}_{22} & \text{ص}_{2} \end{vmatrix} - \text{ص}_{2} \begin{vmatrix} \text{ص}_{1} & \text{ص}_{1} \\ \text{ص}_{12} & \text{ص}_{2} \end{vmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\text{ح}} \Big[\text{ص}_{1}\,\text{ص}_{21}\,\text{ص}_{1} - \text{ص}_{1}\,\text{ص}_{22}\,\text{ص}_{1} - \text{ص}_{2}\,\text{ص}_{11}\,\text{ص}_{2}$$

$$+ \text{ص}_{1}\,\text{ص}_{12}\,\text{ص}_{2} \Big]$$

$$= \frac{1}{\text{ح}} \Big[\text{ص}_{2}\,\text{ص}_{1}\,\text{ص}_{2} - \text{ص}_{2}\,\text{ص}_{21}\,\text{ص}_{1} - \text{ص}_{1}\,\text{ص}_{12}\,\text{ص}_{2}$$

$$+ \text{ص}_{1}\,\text{ص}_{22}\,\text{ص}_{1} \Big]$$

ويلاحظ أن $\text{ح} = \frac{\text{ع}_{1}}{\text{ص}_{1}}$ = مقدار موجب لأن ع_{1} موجب ؛ ص_{1} التى تساوى الناتج الحدى للعنصر الأول موجبة أيضاً . ولذلك نحتاج لتغيير إشارة $\triangle$ إلى معرفة إشارة المقدار المحصور بين القوسين . وللوصول إلى ذلك نلاحظ أن هذا المقدار يشبه إلى حد كبير المقدار الوارد فى الشرط الثانى للنهاية الصغرى للنفقات . هذا الشرط الذى ينص على أنه لأى زوج من القيم ا_{1} ، ا_{2} نختارهما كيفما نشاء يجب أن يتحقق الشرط الآتى :

$$\text{ا}_{1}\,\text{ص}_{11}\,\text{ا}_{1} + \text{ا}_{1}\,\text{ص}_{21}\,\text{ا}_{2} + \text{ا}_{2}\,\text{ص}_{12}\,\text{ا}_{1} + \text{ا}_{2}\,\text{ص}_{22}\,\text{ا}_{2} > \text{صفر}$$

وبمقارنة هذا المقدار بين القوسين يتضح أنه من الممكن أن نحصل على هذه النتيجة لو وضعنا $\text{ا}_{1} = \text{ص}_{2}$ ، $\text{ا}_{2} = \text{ص}_{1}$ وينتج عن ذلك أن :

$$\text{ص}_{2}\,\text{ص}_{11}\,\text{ص}_{2} - \text{ص}_{2}\,\text{ص}_{21}\,\text{ص}_{1} - \text{ص}_{1}\,\text{ص}_{12}\,\text{ص}_{2}$$
$$+ \text{ص}_{1}\,\text{ص}_{2}\,\text{ص}_{1} > \text{صفر}$$

أى أن $\Delta^{\text{ن}} = \dfrac{-1}{\text{موجب}}$ (سالب)

$= \text{مقدار موجب}$ (١٢)

ويساعدنا ذلك على تحديد إشارات معدلات التغير فى إيجاد المعدلات السابقة

فنجد مثلا أن $\dfrac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}_1} =$ سالب بينما $\dfrac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ع}_2} =$ موجب .. وهكذا

حساب النفقة الحدية :

عند إجراء التحليل الخاص بإيجاد توازن المنتج ظهر لنا معامل لاجرانج كعامل تناسب بين الاسعار والنواتج الحدية لكل من العناصر المستخدمة . ولذلك نتوقع أن يكون هذا المعامل دالا على النفقة الحدية للانتاج ويمكن إثبات ذلك كالآتى :

النفقة الحدية $= \dfrac{\partial \hat{\text{ن}}}{\partial \text{ص}}$ حيث $\hat{\text{ن}}$ هى النفقات الكلية الدنيا التى تحقق شروط التوازن وهى تساوى :

$$\hat{\text{ن}} = \text{ع}_1 \text{س}_1 + \text{ع}_2 \text{س}_2 \qquad (1)$$

ونلاحظ أن ع_1 ، ع_2 ثوابت فرضا بينما س_1 ، س_2 اللازمين لتحقيق النفقات الدنيا دالتين فى ص .

$$\therefore \dfrac{\partial \hat{\text{ن}}}{\partial \text{ص}} = \text{ع}_1 \dfrac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}} + \text{ع}_2 \dfrac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}$$

ولما كانت شروط التوازن تنص على أن :

$$\text{ع}_1 = \text{ح}\ \text{ص}_1$$

$$\text{ع}_2 = \text{ح}\ \text{ص}_2$$

فإننا نستطيع كتابة النفقة الحدية كالآتى :

$$\frac{\partial \hat{\text{ق}}}{\partial \text{ص}} = \text{ح}\ \text{ص}_1 \left(\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}}\right) + \text{ح}\ \text{ص}_2 \left(\frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}}\right) \qquad (٢)$$

وقد أثبتنا من قبل أن :

$$\frac{\partial \text{س}_1}{\partial \text{ص}} = \frac{\text{ص}_2\ \text{ص}_{21} - \text{ص}_1\ \text{ص}_{22}}{\text{ح} \cdot \Delta}$$

$$،\quad \frac{\partial \text{س}_2}{\partial \text{ص}} = \frac{\text{ص}_1\ \text{ص}_{12} - \text{ص}_2\ \text{ص}_{11}}{\text{ح} \cdot \Delta}$$

وعلى ذلك أنه بالتعويض فى (٢) تكون :

$$\frac{\partial \hat{\text{ق}}}{\partial \text{ص}} = \frac{\text{ح}\ \text{ص}_1 (\text{ص}_2\ \text{ص}_{21} - \text{ص}_1\ \text{ص}_{22})}{\text{ح} \cdot \Delta}$$

$$= \frac{\text{ح}\ \text{ص}_2 (\text{ص}_1\ \text{ص}_{12} - \text{ص}_2\ \text{ص}_{11})}{\text{ح} \cdot \Delta}$$

أى أن $\frac{\partial \hat{\text{ق}}}{\partial \text{ص}} = \frac{١}{\text{ح} \cdot \Delta} \Big[\text{ح} (\text{ص}_١ \text{ص}_٢ \text{ص}_{٢١} - \text{ص}_١ \text{ص}_١ \text{ص}_{٢٢}$

$+ \text{ص}_٢ \text{ص}_١ \text{ص}_{١٢} - \text{ص}_٢ \text{ص}_٢ \text{ص}_{١١}) \Big]$

$= \frac{١}{\text{ح} \cdot \Delta} [\Delta (\text{ح} \Delta)] = \Delta$ وهو المطلوب

وذلك لأن المحدد Δ يساوى :

$\Delta = \frac{١}{\text{ح}} \times$ (المقدار بين القوسين)

أى أن المقدار بين القوسين $= (\text{ح} \cdot \Delta)$.

خلاصة التوازن الاستاتيكى المقارن :

عند تعيين شروط التوازن بالنسبة لخطة الاستخدام أوجدنا النفقات الدنيا التى تلزم الإنتاج حجم معين من أحجام الناتج . وعينا بالتالى المقادير الواجب استخدامها من العناصر لتحقيق النهاية الصغرى من النفقات وترتب على ذلك أن أمكننا التعبير عن الاستخدامات $س_١$ ، $س_٢$ فى شكل دوال فى $ع_١$ ، $ع_٢$ ، ص وهى فى الواقع دوال طلب المنتج على العناصر . ومن الممكن تحديد خواص هذه الدوال . . أى الكيفية التى يتعرض بها كل من $س_١$ ، $س_٢$ للتغير عند تغير $ع_١$ أو $ع_٢$ أو ص .

وتتلخص هذه الصفات فى الآتى : —

١ — معادلات الطلب على العناصر متجانسة فى الأسعار من الدرجة صفر . لأنه لو تغيرت الأسعار جميعاً بالنسبة للعناصر بنفس الدرجة فأصبح السعر $ع_١$ هو م $ع_١$ والسعر $ع_٢$ هو م $ع_٢$. فإن خطة الاستخدام لن تتغير .

ولاثبات ذلك نجد أن شروط التوازن هى :

$$\frac{ع_١}{ص_١} = \frac{ع_٢}{ص_٢} \quad ، \quad ص = د(س_١ ، س_٢)$$

وذلك فى النقطة الأصلية . فإذا تغيرت الأسعار إذاً (الوضع الجديد بنفس النسبة) فإن دالة الإنتاج لن تتغير بينما أن الشرط الأول يصبح

$$\frac{م\,ع_١}{ص_١} = \frac{م\,ع_١}{ص_١} \quad أى \quad \frac{ع_١}{ص_١} = \frac{ع_٢}{ص_٢}$$

وهو نفس الشرط الأصلى .

وطبيعى أن النفقات الكلية والحدية هى التى تتعرض التغير فى هذه الحالة. فمن المعلوم مثلا أن :

$$\hat{\text{ن}} = \text{ع}_1\text{س}_1 + \text{ع}_2\text{س}_2 \qquad \text{(فى الخطة الأصلية)}$$

فإذا حدث التغير فى الأسعار فان :

$$\hat{\text{ن}} = \text{م ع}_1\text{س}_1 + \text{م ع}_2\text{س}_2 = \text{م}\,\hat{\text{ن}}$$

أى تزيد النفقات الكلية بنفس النسبة .

بالمثل نجد أن النفقة الحدية وهى (حـ) تتغير بنفس النسبة لأن :

$$\text{حـ} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ص}_1} \qquad \text{(فى الحالة الأولى)}$$

$$\text{وتساوى} \quad \frac{\text{م} \times \text{ع}_1}{\text{ص}_1} \qquad \text{(فى الحالة الثانية)}$$

ولما كانت نقطة التوازن النهائى تتوقف على العلاقة بين الايراد الحدى والنفقات الحدية فان هذه النقطة لن تتغير فقط فى الحالة التى تتغير فيها أسعار الناتج بنفس المعدل م . .

فمن المعلوم أن خطة الإنتاج تتحدد عندما ر = حـ ونظراً لأن حـ تغيرت إلى م حـ فان تغير السعر ر إلى م ر يعيدنا إلى نقطة التوازن السابقة .

٢ — يؤدى ارتفاع سعر عنصر ما إلى نقص المقدار المطلوب من ذلك العنصر ، وإلى زيادة المقدار المطلوب من العنصر الآخر .

وقد أثبتنا صحة هذه القاعدة عندما وجدنا أن :

$$\frac{\partial س_{١}}{\partial ع_{١}} = -\frac{ص_{٢}^{٢}}{ح^{٢}\,\Delta}$$

$$،\quad \frac{\partial س_{٢}}{\partial ع_{١}} = \frac{ص_{١}\,ص_{٢}}{ح^{٢}\,\Delta}$$

إذ أنه فى الحالة الأولى يكون المقدار $\frac{ص_{٢}^{٢}}{ح^{٢}}$ موجب

لذلك فان $\frac{\partial س_{١}}{\partial ع_{١}}$ = مقدار سالب ، Δ موجبة كما أثبتنا .

أما فى الحالة الثانية فانه نظراً لأن كل من $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ (نواتج حدية) ، Δ ، $ح^{٢}$ موجبة فان :

$$\frac{\partial س_{٢}}{\partial ع_{١}} = \text{مقدار موجب}$$

وتصبح نفس العلاقات لو استخدمنا العنصر الأول بالثانى . . غير أنه يجب أن نذكر هنا أن هذه العلاقة صحيحة فقط فى حالة استخدام عنصرين . لأنه لو أتيح للمنتج استخدام ثلاثة عناصر أو أكثر فانه من الجائز أن يكون هناك تكامل بين عنصرين من هذه العناصر مما يؤدى إلى تغير الاشارات بشكل معاكس .

٣ — عند أى مستوى الانتاج يكون معدل تغير الاستخدام من عنصر ما بالنسبة إلى التغير فى سعر العنصر الآخر مساو لمعدل تغير الاستخدام من العنصر الآخر بالنسبة إلى تغير سعر العنصر الأول . . أى أن :

$$\frac{\partial \text{س}_{1}}{\partial \text{ع}_{2}} = \frac{\partial \text{س}_{2}}{\partial \text{ع}_{1}} \quad \text{لان كل منهما يساوى} \quad \frac{\text{ص}_{1}\text{ص}_{2}}{\text{ح}^{2} \cdot \Delta}$$

٤ — معدل تغير النفقة الحدية بالنسبة إلى سعر أى عنصر يجب أن يساوى معدل تغير الاستخدام من ذلك العنصر بالنسبة إلى الناتج .

أى أن $\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{ع}_{1}} = \frac{\partial \text{س}_{1}}{\partial \text{ص}}$

لأن كل منهما أثبتنا من قبل أنها تساوى $= \frac{\text{ص}_{2}\text{ص}_{21} - \text{ص}_{1}\text{ص}_{22}}{\text{ح} \cdot \Delta}$

وبالمثل $\frac{\delta \text{ح}}{\delta \text{ع}_{2}} = \frac{\delta \text{س}_{2}}{\delta \text{ص}}$

أى أنه على العموم يكون $\frac{\delta \text{ح}}{\delta \text{ع}_{r}} = \frac{\delta \text{س}_{r}}{\delta \text{ص}}$ (حيث r = ١ أو ٢)

٥ — بغض النظر عن الاعتبارات الخاصة بالإيراد فإن تحقيق الاستخدام فى أقل نفقة يتطلب تناسب سعر كل عنصر مع الناتج الحدى لهذا العنصر حيث عامل التناسب هو النفقة الحدية .

أى أن : $\text{ح} = \frac{\delta \text{ف}}{\delta \text{ص}}$

$$\therefore \; \text{ع}_{\text{ر}} = \left(\frac{\partial \, \text{ن}}{\partial \, \text{ص}}\right) \text{ص}_{\text{ر}}$$

٦ — معدل تغير النفقة الحدية بالنسبة لتغير حجم الناتج هو :

$$\frac{\partial^{٢} \text{ن}}{\partial \, \text{ص}^{٢}} = \frac{١}{\triangle} \left(\text{ص}_{١١} \, \text{ص}_{٢٢} - \text{ص}^{٢}_{٢١} \right)$$

ولإثبات ذلك نلاحظ أن :

$$\frac{\partial^{٢} \text{ن}}{\partial \, \text{ص}^{٢}} = \frac{\partial}{\partial \, \text{ص}} \left(\frac{\partial \, \text{ن}}{\partial \, \text{ص}}\right) = \frac{\partial \, \text{حـ}}{\partial \, \text{ص}}$$

وكما وجدنا من قبل فإن $\frac{\partial \, \text{حـ}}{\partial \, \text{ص}}$ يساوى الطرف الأيسر فى المعادلة السابقة

ومن جهة أخرى وجدنا أنه لكى تتعين خطة الإنتاج فعلا عند النهاية العظمى للأرباح فان :

$$\frac{\partial^{٢} \text{ن}}{\partial \, \text{ص}^{٢}} < \text{صفر}$$

أى أن $\frac{\partial \, \text{حـ}}{\partial \, \text{ص}} < \text{صفر}$

وهذا يتطلب تناقص النفقة الحدية عند نقطة توازن المنتج فاذا قاونا هذا الشرط بقيمة المعامل $\frac{\partial \, \text{حـ}}{\partial \, \text{ص}}$ وجدنا أنه يتطلب أن يكون المقدار ($\text{ص}_{١١} \, \text{ص}_{٢٢} - \text{ص}^{٢}_{٢١}$) مقدار سالب . غير أن هذا المقدار إن هو إلا محدد التفاضلات الثانية لدالة الإنتاج أى من الممكن كتابته على النحو الآتى :

$$\begin{vmatrix} ص_{11} & ص_{21} \\ ص_{12} & ص_{22} \end{vmatrix}$$

ويطلق عليه أحياناً اسم Hessian ومعنى الشرط اللازم والكافى للوصول إلى نقطة التوازن أن دالة الانتاج يجب أن يتعين شكلها بحيث تمكن فعلا من تحقيق الشرط الخاص بأن يكون محدد تفاضلاتها الثانية موجبا .

فمثلا لو أننا اخترنا للسهولة دالة خطية كدالة للانتاج ولتكن هى :

$$ص = ا + ب_1 س_1 + ب_2 س_2$$

فإن التفاضلات الثانية لهذه الدالة لا بد وأن تساوى الصفر وبالتالى فإن محدد التفاضلات الثانية يساوى الصفر . وعلى ذلك فلن يتحقق بالضرورة الشرط الثانى للنهاية العظمى للارباح . وتعتبر هذه الدالة . خاطئة من وجهة النظر الاقتصادية لهذا السبب .

كذلك نلاحظ أن الدوال المتجانسة تكون عموما ذات محدد تفاضلات ثانية يساوى الصفر . ولذلك فهى لا تحقق الشرط الثانى للنهاية العظمى .

دوال إنتاج كوب دوجلاس Cobb Douglas

يمكن استخدام دوال الانتاج المعروفة باسم كوب دوجلاس فى قطاع من القطاعات أو فى الاقتصاد القومى ككل . ودوال الإنتاج هــذه بمثابة افتراض مبنى على الملاحظة والاختبار العملى والتى أعطت نتائج احصائية جيدة . وتظهر مثل هذه الدوال على الصورة التالية :

$$ص = م\, ع^{ى}\, س^{(١-ى)}$$

حيث ص ترمز إلى الإنتاج ، ع إلى حجم العمل ، س إلى مقدار رأس المال المستخدم بينما م ى (ى > ١) ثوابت موجبة ، والدالة خطية متجانسة .

ولنفرض أن حجم العمل ورأس المال قد زادو بنسب متساوية .

فأصبحت ل هى ث ل ، س أصبحت ث س . (إذا كانت ث = ١٠ر١ فان الزيادة فى كل عنصر من عناصر الانتاج تبلغ ١٠٪) . لذلك فان .

$$م\,(ث\, ل)^{ى}\,(ث\, س)^{١-ى} = ث^{ى}\, ث^{(١-ى)}\, م\, ل^{ى}\, س^{(١-ى)}$$

$$= ث\, م\, ل^{ى}\, س^{(١-ى)}$$

$$= ث\, ص$$

أى أن الإنتاج ارتفع بنفس النسبة . لذلك فان هــذه الحالة تعبر عن حالة ثبات الغلة .

البرمجة الخطية :

إيجاد النهاية الصغرى للنفقات (التكاليف) :

لنفرض أن إنتاج أحد السلع يتطلب استخدام عنصرين (أ ، ب) والتى تزن ٥ كيلو و ١٠ كيلوات للوحدة على الترتيب . ويزن المنتج النهائى ١٥٠ كيلو . وتكاليف الوحدة هى ٢ جنيه و ٨ جنيهات للعنصرين أ ، ب على الترتيب .

فما هى الكميات التى يستخدمها من العنصرين أ ، ب حتى تصل تكلفة إنتاج الوحدة إلى النهاية الصغرى بشرط ألا يزيد استخدامه من أ عن ٢٠ وحدة وألا يقل استخدامه من ب عن ١٤ وحدة ؟ . ويلاحظ أن هناك قيدين أحدهما قيد يضع حدوداً على الكميات المستخدمة من عناصر الإنتاج . . والآخر هو وزن المنتج النهائى .

ويمكن صياغة هذه المعلومات فى قالب رياضى على النحو التالى :

ت = ٢ أ + ٨ ب دالة التكاليف المطلوب إيجاد النهاية الصغرى لها

القيود {
٥ أ + ١٠ ب = ١٥٠
أ > ٢٠ ، ب ⩾ ١٤

ومن المعادلة التى تحكم الوزن نجد الآتى :

ب = ١٥ − أ / ٢

ولما كانت ب $\leqslant$ ١٤

∴ ١٥ — $\frac{أ}{٢}$ $\leqslant$ ١٤

أو $\frac{أ}{٢}$ $>$ ١

لهذا فان أ = صفر أو تساوى ٢ ، ب = ١٥ أو ١٤ .

فعندما أ = صفر ، فان ب = ١٥ والتكاليف ت = ١٢٠ جنيه

وعندما أ = ٢ ، ب = ١٤ فان ت = ١٠٦ جنيه وهى تمثل أدنى تكاليف الإنتاج التى تقابل كل المواصفات والشروط المطلوبة .

تعظيم الإيراد :

لنفرض أن أحد منتجى الأدوية يود أن يحصل على جـدول إنتاج يعظم إيراداته الناتجة من بيع الأدوية (أ ، ب) التى تبلغ سعر الوحدة منها ٦٠ قرش و ٤٠ قرش على التوالى . والإنتاج محدد بالطاقة الإنتاجية لهذه الأدوية ، وطاقة إنتاج العبوات ، وحجم العمل المتاح للتشغيل والمناولة . وتنحصر القيود او الشروط المقيدة للانتاج فى الآتى :

١ — طاقة إنتاج الدواء ١٠٠٠ وحدة من أ أو ب أو خليط بنسب خطية من أ ، ب .

٢ — طاقة إنتاج العبوات هى ١٦٠٠ وحدة من أ أو ٨٠٠ وحدة من ب أو خليط بنسب خطية من أ ، ب .

٣ — كمية العمل المتاحة تكفى لإنتاج ٨٠٠ وحدة من ا أو ١٦٠٠ وحدة من ب أو خليط بنسب خطية ا ، ب .

ومع الأخذ فى الاعتبار أجزاء الطاقة الإنتاجية التى يحتاجها لإنتاج وحدة من كل نوع من الأدوية وعبواتها ، فان المتباينات الآتية تشير إلى قيم ا ، ب المسموح بها :

(١) ا/١٠٠٠ = ب/١٠٠٠ < ١ أو ا + ب < ١٠٠٠

(٢) ا/١٦٠٠ = ب/٨٠٠ < ١ أو ا + ٢ب < ١٦٠٠

(٣) ا/٨٠٠ = ب/١٦٠٠ < ١ أو ٢ ا + ب < ١٦٠٠

فاذا أهملنا إشارة المتباينة فان التساوى بين الجانبين يصف أعلى كونتور يحيط بالمجموعة الحدية من القيم المسموح بها (ذات الجدوى) (أى الجزء الخطى من منحنى إمكانيات الانتاج) . وبحل هذه المعادلات بأخذ كل زوج منها ، فان نقط التقاطع (أو الركن) الذى يحدد القيم التى يمكن الحصول عليها من ا ، ب . هذه القيم هى :

(١ ، ٢) ا = ٤٠٠ ، ب = ٦٠٠

(١ ، ٣) ا = ٦٠٠ ، ب = ٤٠٠

(٢ ، ٣) ا = ١٦٠٠/٣ ، ب = ١٦٠٠/٣

ودالة الإيراد المطلوب تعظيمها هى :

د = ٦٠ر٩ + ٤٠ر ب

وبالنسبة لـ (١ ، ٢) د = ٦٠ر (٤٠٠) + ٤٠ر (٦٠٠) = ٤٨٠ جنيه

(١ ، ٣) د = ٦٠ر (٦٠٠) + ٤٠ر (٤٠٠) = ٥٢٠ جنيه

ولما كان التقاطع (٢ ، ٣) يقع خارج حدود إنتاج الأدوية أى أن $\frac{١٦٠٠}{٣} + \frac{١٦٠٠}{٣} > ١٠٠٠$ ، وهو أمر مستحيل فان أقصى إنتاج هو ٥٢٠ جنيه يتحقق من بيع ٦٠٠ وحدة من ا و ٤٠٠ وحدة من ب

ويمكن حل المشكلتين السابقتين (تدنية التكاليف وتعظيم الإيراد) بالطريقة البيانية أو باستخدام طريقة السمبلكس وهى أكثر تعقيداً .

الفهرس

الموضوع	الصفحة
المقدمة	٥

الجزء الأول

الطلب وسلوك المستهلك

صفحة

الجزء الثانى

الانتاج والتكاليف

التجارة والتعاون
للطبع والنشر
٣٠ شارع اسماعيل سري / المنيرة
القصر العيني - القاهرة
ت : ٢٥١٨٧٠